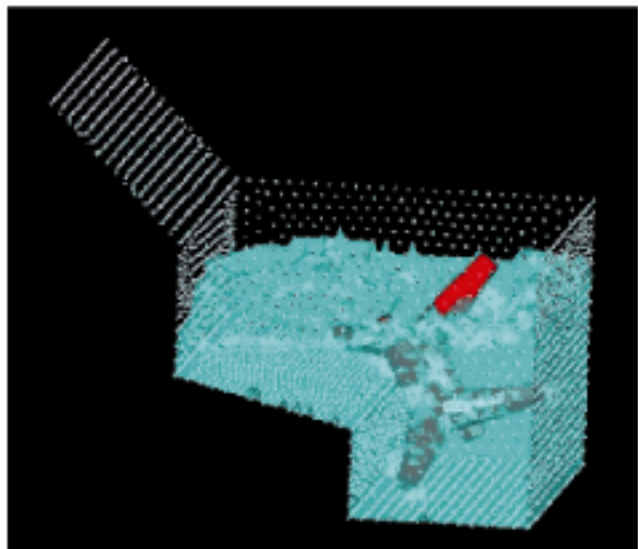


El método de partículas y elementos finitos. Aplicaciones en ingeniería de puertos

**E. Oñate
M.A. Celigueta
S.R. Idelsohn
F. Del Pin**



El método de partículas y elementos finitos. Aplicaciones en ingeniería de puertos

**E. Oñate
M.A. Celigueta
S.R. Idelsohn
F. Del Pin**

Publicación CIMNE Nº-278, Octubre 2005

EL MÉTODO DE PARTÍCULAS Y ELEMENTOS FINITOS. APLICACIONES EN INGENIERÍA DE PUERTOS

E. Oñate, M.A. Celigueta, S.R. Idelsohn y F. Del Pin

[†] Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería
Universidad Politécnica de Cataluña
Gran Capitán s/n, 08034 Barcelona
E-mail: onate@cimne.upc.edu
Web page: www.cimne.upc.com

1 INTRODUCCIÓN

Existe un interés creciente en el desarrollo de métodos robustos y eficientes para el análisis de problemas de ingeniería que involucren la interacción de fluidos y estructuras teniendo en cuenta los grandes movimientos de la superficie libre del fluido y la existencia de cuerpos sumergidos total o parcialmente. Los ejemplos de este tipo son comunes en problemas de hidrodinámica de barcos, estructuras off-shore, aliviaderos de presas, flujos en lámina libre en canales, reactores de mezclas, proceso de llenado de moldes, etc.

El movimiento de sólidos en fluidos se analiza normalmente con el método de elementos finitos (MEF) utilizando la denominada formulación arbitraria Lagrangiana-Euleriana (ALE). En el método ALE, el movimiento de partículas del fluido está desacoplado del de los nodos de la malla. Por tanto la velocidad relativa entre los nodos de la malla y las partículas se utiliza como la velocidad convectiva en las ecuaciones de cantidad de movimiento.

La formulación ALE se ha utilizado conjuntamente con el método de elementos finitos estabilizados para obtener diferentes procedimientos numéricos para resolver el problema de interacción fluido-estructura y FE. Por ejemplo, Tezduyar *et al.* (1992a,b, 2001) han utilizado una formulación de un dominio deformado espacial junto con una técnica de estabilización en el espacio-tiempo para el cálculo de problemas de interacción de fluido-estructura con superficie libre. Las dificultades típicas del análisis de la interacción fluido-estructura utilizando el MEF tanto con la formulación Euleriana como la ALE incluyen el tratamiento de los términos convectivos y de la condición de incompresibilidad en las ecuaciones de fluido, el modelado y seguimiento de la superficie libre en el fluido, la transferencia de la información entre los dominios del fluido y del sólido via las interfases de contacto, el modelado de la rotura de olas, la posibilidad de tratar grandes movimientos de sólidos rígidos de estructura dentro del fluido, la actualización eficiente de las mallas de elementos finitos para la estructura y el fluido, etc.

La mayoría de estos problemas desaparecen si se utiliza una *descripción Lagrangiana* para formular las ecuaciones de gobierno de los dominios del fluido y del sólido. En la formulación Lagrangiana se sigue el movimiento de cada una de las partículas de forma individual y, consecuentemente, los nodos en una malla de elementos finitos pueden considerarse como “partículas” en movimiento. Por consiguiente, el movimiento de la malla discretiza el dominio total (incluyendo los dominios del fluido y la estructura) se sigue durante la solución transitoria.

En este trabajo hemos desarrollado una clase particular de formulación Lagrangiana para resolver problemas en los que intervienen la interacción entre fluidos y sólidos. El método se denomina *método de partículas y elementos finitos* (PFEM), el PFEM trata los nodos

en la malla tanto en los dominios del fluido como del sólido como partículas que pueden moverse libremente e incluso separarse del dominio principal del fluido representando, por ejemplo, el efecto de gotas de agua. En una malla de elementos finitos conecta los nodos que definen el dominio discretizado donde se resuelven las ecuaciones de gobierno en la forma estándar del MEF. El PFEM es la evolución natural del trabajo reciente de los autores para la resolución de problemas de interacción fluido-estructura utilizando métodos de elementos finitos lagrangianos y técnicas sin malla [Aubry *et al.* (2004); Idelsohn *et al.* (2003a; 2003b; 2004); Oñate *et al.* (2003; 2004)]..

Una ventaja obvia de la formulación Lagrangiana es que los términos convectivos desaparecen de las ecuaciones del fluido. La dificultad, sin embargo, se transfiere al problema de mover adecuadamente (y eficientemente) los nodos de la malla. Ciertamente para grandes movimientos de la malla puede ser necesario remallar a lo largo de la solución en el tiempo. Utilizamos un procedimiento de regeneración de la malla innovador que mezcla elementos de diferentes formas mediante un método extendido de Delaunay [Idelsohn *et al.* (2003a; 2003c)]. Estos elementos finitos polihédricos necesitan funciones de forma especiales. En nuestro trabajo se han utilizado las funciones de forma del denominado método de elementos finitos sin malla (PFEM) [Idelsohn *et al.* (2003a)].

En la formulación Lagrangiana existe todavía la necesidad de tratar adecuadamente la condición de la incompresibilidad en el fluido. La utilización de interpolaciones de elementos finitos estándar puede conducir al efecto del bloqueo por deformación volumétrica al menos que se tomen algunas precauciones. En la literatura se encuentran diferentes procedimientos de elementos finitos para aliviar el problema del bloqueo en fluidos incompresibles [Chorin (1967); Codina (2002); Codina *et al.* (1998); Codina and Blasco (2000); Codina and Zienkiewicz (2002); Cruchaga and Oñate (1997; 1999); Donea and Huerta (2003); Franca and Frey (1992); Hansbo and Szepessy (1990); Hughes *et al.* (1986; 1989; 1994); Oñate (1998); Sheng *et al.* (1996); Tezduyar *et al.* (1992); Zienkiewicz and Taylor (2000); Storti *et al.* (2004)]. Un objetivo general es poder utilizar elementos de bajo orden con interpolaciones de igual orden para las variables de velocidad y presión [Oñate (2000)]. En nuestro trabajo hemos utilizado una técnica de estabilización basada en el método de cálculo finito (FIC). En las referencias [García and Oñate (2003); Oñate (2004); Oñate *et al.* (2000; 2004); Oñate and García (2001); Oñate and Idelsohn (1998)] se pueden encontrar diferentes aplicaciones de la técnica FIC para problemas de fluidos incompresibles utilizando elementos triangulares y tetrahédricos lineales.

La formulación Lagrangiana tiene muchas ventajas para seguir el movimiento de las partículas del fluido en flujos en donde existen grandes desplazamientos de la superficie libre, como en el caso de olas que rompen sobre una estructura y en *splashing* (salpicadura) de líquidos (Figura 1). Recordamos que la información en el método PFEM es típicamente nodal, es decir la malla de elementos finitos se utiliza fundamentalmente para obtener los valores de las variables de estado (por ejemplo las velocidades, presiones, etc.) en los nodos. Aquí aparece una dificultad en la identificación de los contornos del dominio a partir de una colección dada de nodos. Ciertamente el “contorno” puede incluir la superficie libre en el fluido y también las partículas individuales del líquido que se mueven fuera del dominio del fluido. En nuestro trabajo hemos utilizado la técnica Alpha Shape para identificar los nodos contorno [Edelsbrunner and Mücke (1999)].

El contenido de este informe es el siguiente. En el próximo apartado se presentan las ideas básicas del PFEM. Tras ello se presentan las ecuaciones básicas para un problema de flujo de fluido incompresible utilizando una descripción Lagrangiana actualizada y el método FIC. Después se describe un esquema de pasos fraccionados para la solución transitoria utilizando procedimientos de elementos finitos estándar. Se dan también detalles del tratamiento del

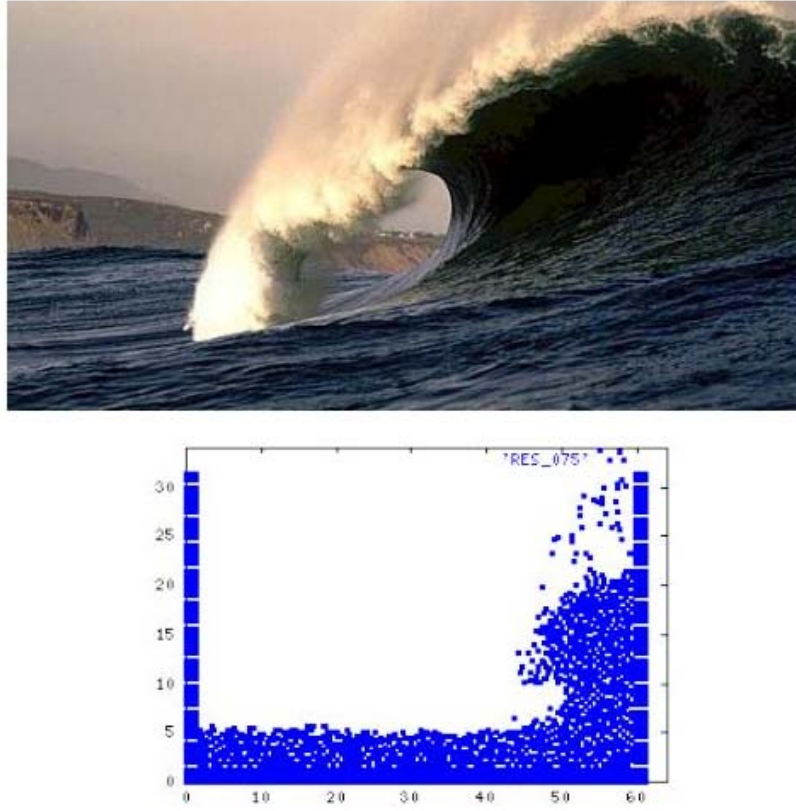


Figura 1. (a) Ola de gran tamaño rompiendo sobre la playa. (b) Resultados del análisis 2D de una ola rompiendo una pared vertical utilizando el PFEM.

problema acoplado entre el fluido y la estructura. Tras ello se describen brevemente los procedimientos para la generación de la malla y para la identificación de los nodos en la superficie libre. Finalmente, se demuestra la eficiencia de la técnica PFEM en su aplicación a un número de problemas de interacción fluido-estructura en los que intervienen grandes movimientos de la superficie libre, olas, cuerpos en movimiento, etc.

2 IDEAS BÁSICAS DEL MÉTODO DE PARTÍCULAS Y ELEMENTOS FINITOS

Consideremos un dominio que contiene subdominios de fluido y de sólido. Las partículas de fluido en movimiento interactúan con los contornos del sólido induciendo por tanto la deformación del sólido que a su vez afecta al movimiento del fluido y, por consiguiente, el problema está totalmente acoplado.

Los problemas de interacción fluido-estructura se han resuelto tradicionalmente utilizando una descripción ALE para las ecuaciones del fluido mientras que la estructura se modela con una formulación Lagrangiana total. En la literatura se encuentran muchos ejemplos de aplicación de este tipo de procedimiento [Donea and Huerta (2003); Zienkiewicz and Taylor (2000)].

En la técnica PFEM que aquí se presenta, tanto los dominios del fluido como del sólido se modelan utilizando una *formulación Lagrangiana* actualizada. Se utiliza el método de los

elementos finitos para resolver las ecuaciones de gobierno en ambos dominios. Por tanto debe generarse una malla que discretiza estos dominios para resolver las ecuaciones de gobierno para el fluido y el sólido en la forma de métodos finitos tradicional. Se destaca de nuevo que los nodos que discretizan los dominios del fluido y del sólido pueden entenderse como partículas de materiales cuyo movimiento se sigue durante la solución transitoria.

La calidad de la solución numérica dependerá obviamente de la discretización utilizada, como sucede en el MEF estándar. Puede utilizarse también técnicas de refinamiento adaptable para mejorar la solución en zonas donde ocurran grandes movimientos del fluido o de la estructura.

La formulación Lagrangiana permite seguir el movimiento de cada partícula individual del fluido (un nodo). Esto es útil para modelar la separación de las partículas del líquido del dominio principal del fluido y para seguir su movimiento como partículas individuales con una velocidad inicial y sometidas a las fuerzas de gravedad.

En resumen, una solución típica con el PFEM involucra las etapas siguientes.

1. Discretizar los dominios del fluido y del sólido con una malla de elementos finitos. El proceso de generación de la malla puede basarse en una discretización de Delaunay estándar [George (1991)] del dominio de análisis utilizando una colección inicial de puntos que se convierten entonces en los nodos de la malla. Alternativamente, puede generarse los nodos durante el proceso de generación de la malla utilizando un método de generación frontal [Irons (1970); Thompson *et al.* (1999)].
2. Identificar los contornos externos para los dominios del fluido y del sólido. Esta es una etapa esencial ya que algunos contornos (como la superficie libre en los fluidos) pueden haberse distorsionado severamente durante el proceso de solución, incluyendo la separación y reentrada de nodos. En nuestro trabajo hemos utilizado el método de Alpha Shape [Edelsbrunner and Mücke (2003)] para la definición de los nodos del contorno.
3. Resolver las ecuaciones acopladas del movimiento Lagrangiano para los dominios del fluido y del sólido. Calcular las variables de estado relevante en ambos dominios en cada paso de tiempo: las velocidades, la presión y las tensiones viscosas en el fluido, y los desplazamientos, las deformaciones y las tensiones en el sólido.
4. Mover los nodos de la malla a una nueva posición en función del tamaño del paso del tiempo. Esta etapa es típicamente una consecuencia del proceso de solución de la etapa 3.
5. Generar una nueva malla en caso necesario. El proceso de regeneración de la malla puede tener lugar después de un número prescrito de pasos de tiempo, o cuando la malla actual ha sufrido importantes distorsiones debido al movimiento Lagrangiano. En nuestro trabajo utilizamos un esquema de generación de malla innovador basado en una teselación extendida de Delaunay [Idelsohn *et al.* (2003a; 2003b; 2004)].
6. Volver a la etapa 2 y repetir el proceso de solución para el paso de tiempo siguiente.

En el siguiente apartado se dan detalles de la formulación de elementos finitos lagrangianos estabilizados para solución de las ecuaciones del fluido utilizando la técnica FIC. En las secciones que siguen se dan detalles del esquema de pasos fraccionados para la solución transitoria del problema acoplado interacción fluido-estructura utilizando el MEF y detalles del método de reconocimiento de contornos y la técnica de la regeneración de la malla utilizada. Finalmente se presentan ejemplos de aplicación del MEF.

Para completar esta introducción, en la Figura 2 se muestra un ejemplo típico de una aplicación bi-dimensional del PFEM. Las figuras corresponden al análisis del problema de la rotura de una columna de agua que se describe en el apartado 10.1. La Figura 2a muestra la malla inicial de rectángulo de elementos rectangulares de cuatro nodos que discretizan el dominio del fluido y las paredes del sólido. Los nodos de contorno identificados con el método Alpha-Shape se han marcado con un círculo. Se aprecia en las Figuras 2b y 2c la malla en los dominios del fluido y del sólido en dos instantes de tiempo diferentes.

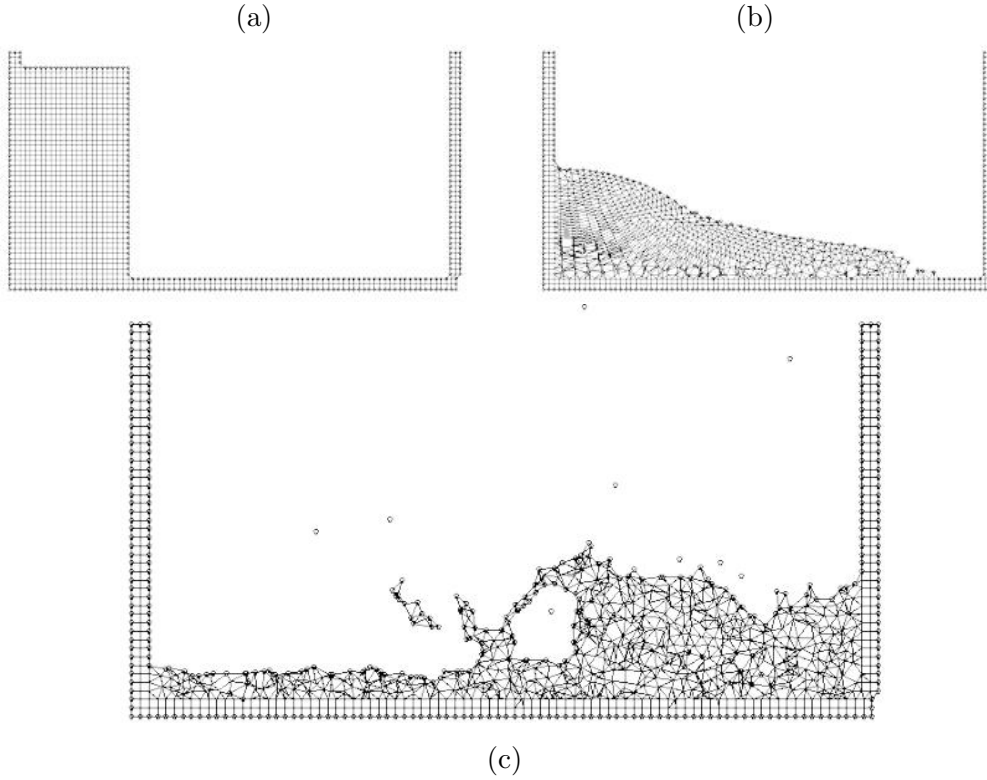


Figura 2. Rotura de una columna de agua. (a) Discretización del dominio del fluido y de las paredes del recipiente. Los nodos del contorno se marcan con círculos. (b) y (c) Mallas en el fluido y en las paredes del recipiente en dos tiempos distintos.

3 ECUACIONES LAGRANGIANAS PARA UN FLUIDO INCOMPRESIBLE. FORMULACIÓN FIC

Las ecuaciones infinitesimales estándar para un fluido viscoso incompresible pueden escribir en un marco Lagrangiano actualizado como [Oñate (1998); Zienkiewicz and Taylor (2000)].

Cantidad de movimiento

$$r_{m_i} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

Balance de masa

$$r_d = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (2)$$

donde

$$r_{m_i} = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - b_i \quad , \quad \sigma_{ji} = \sigma_{ij} \quad (3)$$

$$r_d = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \quad i, j = 1, n_d \quad (4)$$

En las ecuaciones anteriores n_d es el número de las dimensiones del espacio, v_i es la velocidad a lo largo del eje global ($v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}$, donde u_i es el desplazamiento i th) y ρ es la densidad (constante) del fluido, p es la presión absoluta (definida positiva en compresión), b_i son las fuerzas másicas y σ_{ij} son las tensiones viscosas desviadoras relacionadas con la viscosidad μ por la expresión estándar

$$s_{ij} = 2\mu \left(\dot{\varepsilon}_{ij} - \delta_{ij} \frac{1}{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \quad (5)$$

donde δ_{ij} es el delta d Kronecker y las velocidades de deformación de $\dot{\varepsilon}_{ij}$ son

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (6)$$

En nuestro trabajo resolveremos un *sistema de ecuaciones modificadas* obtenido mediante la técnica de cálculo finito. Las ecuaciones de gobierno en la formulación FIC son [Oñate (1998; 2000; 2004); Oñate *et al.* (2001)]

Cantidad de movimiento

$$r_{m_i} - \frac{1}{2} h_j \frac{\partial r_{m_i}}{\partial x_j} = 0 \quad (7)$$

Balance de masa

$$r_d - \frac{1}{2} h_j \frac{\partial r_d}{\partial x_j} = 0 \quad (8)$$

La definición del problema se completa con las siguientes condiciones de contorno

$$n_j \sigma_{ij} - t_i + \frac{1}{2} h_j n_j r_{m_i} = 0 \quad \text{on } \Gamma_t \quad (9)$$

$$u_j - u_j^p = 0 \quad \text{on } \Gamma_v \quad (10)$$

y la condición inicial es $u_j = u_j^0$ for $t = t_0$. Se adopta el convenio de suma estándar para los índices repetidos al menos que se indique lo contrario.

En las Ecs.(6) y (7) t_i y u_j^p son fuerzas de superficie y desplazamientos prescritos en los contornos Γ_t y Γ_v , respectivamente, n_j son las componentes de la normal del vector unitario al contorno y σ_{ij} son las tensiones totales dadas por $\sigma_{ij} = s_{ij} - \delta_{ij}p$.

Las h_i en las ecuaciones anteriores son *distancias características* del dominio donde se satisface el balance de cantidad de movimiento y de masa. En la Ec.(9) estas distancias están relacionadas con el dominio donde se establece el equilibrio de las fuerzas de superficie. Los

detalles de la obtención de las Ecs.(7)–(10) pueden encontrarse en las referencias [Oñate (1998; 2000); Oñate *et al.* (2001)].

Las Ecs.(7)–(10) son el punto inicial para desarrollar métodos de elementos finitos estabilizados para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles en un sistema Lagrangiano de referencia utilizando una interpolación de igual orden para las variables de velocidad y presión [Idelsohn *et al.* (2002; 2003a; 2003b; 2004); Oñate *et al.* (2003); Aubry *et al.* (2004)]. La aplicación de la formulación FIC al análisis de problemas de fluidos utilizando técnicas de elementos finitos y sin malla pueden encontrarse en [García and Oñate (2003); Oñate (2000; 2004); Oñate *et al.* (2000; 2004a,b); Oñate and García (2001); Oñate and Idelsohn (1988)].

3.1 Transformación de la ecuación de balance de masa. Ecuaciones de gobierno integrales

El término subrayado en la Ec.(8) puede expresarse en función de las ecuaciones de cantidad de movimiento. La nueva expresión para la ecuación de balance de mas es (ver Apéndice)

$$r_d - \sum_{i=1}^{n_d} \tau_i \frac{\partial r_{m_i}}{\partial x_i} = 0 \quad (11)$$

con

$$\tau_i = \frac{3h_i^2}{8\mu} \quad (12)$$

Las τ_i 's en la Ec.(11), cuando se escalan por la densidad, se denominan *parámetros de tiempo intrínseco*. Valores similares de τ_i (usualmente se toma $\tau_i = \tau$) se utilizan en otros trabajos donde se obtienen por extensiones ad-hoc del problema advectivo-difusivo unidimensional [Codina *et al.* (1998); Codina and Blasco (2000); Codina (2002); Codina and Zienkiewicz (2002); Cruchaga and Oñate (1997; 1999); Donea and Huerta (2003); Franca and Frey (1992); Hansbo and Szepessy (1990); Hughes *et al.* (1986; 1989; 1994); Oñate (1998; 2000; 2004); Sheng *et al.* (1996); Storti *et al.* (2004); Tezduyar *et al.* (1992); Zienkiewicz and Taylor (2000)].

En este momento ya no es necesario retener los términos de estabilización en las ecuaciones de cantidad de movimiento. Estos términos son críticos en las formulaciones Eulerianas para estabilizar la solución numérica para altos valores de los términos convectivos. En la formulación Lagrangiana los términos convectivos desaparecen de las ecuaciones de cantidad de movimiento y los términos FIC en estas ecuaciones solo son necesarios para obtener la forma de la ecuación de balance de masa de la Ec.(11) y pueden despreciarse a partir de ahí. Consistentemente, los términos de estabilización se desprecian también en la ecuación de las condiciones de contorno de Neuman (Ecs.(9)).

La expresión de residuos ponderados de la forma final de las ecuaciones de cantidad de movimiento y de balance de masa pueden escribirse como

$$\int_{\Omega} \delta v_i r_{m_i} d\Omega + \int_{\Gamma_i} \delta v_i (n_j \sigma_{ij} - t_i) d\Gamma = 0 \quad (13)$$

$$\int_{\Omega} q \left[r_d - \sum_{i=1}^{n_d} \tau_i \frac{\partial r_{m_i}}{\partial x_i} \right] d\Omega = 0 \quad (14)$$

donde δv_i y q are arbitrary weighting functions equivalent to virtual velocity and virtual pressure fields.

El término r_{m_i} en la Ec.(14) y las tensiones desviadoras y los términos de presión dentro de r_{m_i} en la Ec.(13) se integran por partes para dar

$$\int_{\Omega} \left[\delta v_i \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \delta \varepsilon_{ij} (s_{ij} - \delta_{ij} p) \right] d\Omega - \int_{\Omega} \delta v_i b_i d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta v_i t_i d\Gamma = 0 \quad (15)$$

$$\int_{\Omega} q \frac{\partial v_i}{\partial x_i} d\Omega + \int_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^{n_d} \tau_i \frac{\partial q}{\partial x_i} r_{m_i} \right] d\Omega = 0 \quad (16)$$

En la Ec.(15) $\delta \varepsilon_{ij}$ son las velocidades de deformación virtuales. Adviértase que el término de contorno que resulta de la integración por partes de r_{m_i} en la Ec.(16) se ha despreciado ya que se ha encontrado que la influencia de este término en la solución numérica es despreciable.

3.2 Proyección del gradiente de presión

El cálculo de los términos residuales en la Ec.(16) pueden simplificarse si introducimos las proyecciones de gradiente de presión π_i , definidas como

$$\pi_i = r_{m_i} - \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (17)$$

Expresamos ahora r_{m_i} en la Ec.(17) en función de las π_i que se convierten en variables adicionales. El sistema de ecuaciones integrales aumenta por consiguiente en el número necesario de ecuaciones imponiendo que el residuo r_{m_i} se hace cero dentro del dominio de análisis (en un sentido medio). Esto da el sistema final de las ecuaciones de gobierno como

$$\int_{\Omega} \left[\delta v_i \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \delta \varepsilon_{ij} (s_{ij} - \delta_{ij} p) \right] d\Omega - \int_{\Omega} \delta v_i b_i d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta v_i t_i d\Gamma = 0 \quad (18)$$

$$\int_{\Omega} q \frac{\partial v_i}{\partial x_i} d\Omega + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n_d} \tau_i \frac{\partial q}{\partial x_i} \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} + \pi_i \right) d\Omega = 0 \quad (19)$$

$$\int_{\Omega} \delta \pi_i \tau_i \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} + \pi_i \right) d\Omega = 0 \quad \text{no sum in } i \quad (20)$$

donde $i, j, k = 1, n_d$. En las Ecs.(20) $\delta \pi_i$ son funciones de peso apropiadas y τ_i se introducen por razones de simetría.

4 DISCRETIZACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS

4.1 Obtención de las ecuaciones de la discretización

Escogemos interpolaciones de continuidad C^0 para las velocidades, la presión y las proyecciones del gradiente de presión π_i sobre cada elemento con n nodos. Las interpolaciones se escriben como

$$v_i = \sum_{j=1}^n N_j \bar{v}_i^j, \quad p = \sum_{j=1}^n N_j \bar{p}^j, \quad \pi_i = \sum_{j=1}^n N_j \bar{\pi}_i^j \quad (21)$$

donde $(\bar{\cdot})^j$ denota las variables nodales y N_j son las funciones de forma [Zienkiewicz and Taylor (2000)]. En el Apartado 6 se dan más detalles del proceso de discretización de la malla y de la selección de las funciones de forma.

Substituyendo las aproximaciones (21) en las Ecs.(19–20) y escogiendo una forma de Galerkin con $\delta v_i = q = \delta \pi_i = N_i$ se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones de discretización

$$\mathbf{M}\dot{\bar{\mathbf{v}}} + \bar{\mathbf{g}} - \mathbf{f} = 0 \quad (22a)$$

$$\mathbf{G}^T \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{L}\bar{\mathbf{p}} + \mathbf{Q}\bar{\boldsymbol{\pi}} = 0 \quad (22b)$$

$$\mathbf{Q}^T \bar{\mathbf{p}} + \hat{\mathbf{M}}\bar{\boldsymbol{\pi}} = 0 \quad (22c)$$

donde

$$\bar{\mathbf{g}} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T [\mathbf{s} - \mathbf{m}p] d\Omega \quad (23)$$

is el vector de fuerzas nodales interno que se obtiene de las ecuaciones de cantidad de movimiento, \mathbf{s} es el vector de tensiones desviadoras, \mathbf{B} es la matriz de velocidades de deformación y $\mathbf{m} = [1, 1, 0]^T$ para problemas bidimensionales.

Este vector y el resto de matrices y vectores en las Ecs.(22) se ensamblan de las contribuciones de elementos finitos dadas para problemas 2D por

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \int_{\Omega^e} \rho N_i N_j d\Omega \quad , \quad \bar{\mathbf{g}}_i = \int_{\Omega} \mathbf{B}_i^T [\mathbf{s} - \mathbf{m}p] d\Omega \quad , \quad \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x_2} & \frac{\partial N_i}{\partial x_1} \end{bmatrix} \\ L_{ij} &= \int_{\Omega^e} \tau_k \frac{\partial N_i}{\partial x_k} \frac{\partial N_j}{\partial x_k} d\Omega \quad , \quad \mathbf{Q} = [\mathbf{Q}^1, \mathbf{Q}^2] \quad , \quad Q_{ij}^k = \int_{\Omega^e} \tau_k \frac{\partial N_i}{\partial x_k} N_j d\Omega \\ \hat{\mathbf{M}} &= \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{M}}^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{M}}^2 \end{bmatrix} \quad , \quad \hat{\mathbf{M}}_{ij}^k = \int_{\Omega^e} \tau_k N_i N_j d\Omega \quad , \quad \mathbf{G}_{ij} = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_i^T \mathbf{m} N_j d\Omega \\ \mathbf{f}_i &= \int_{\Omega^e} N_i \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t^e} N_i \mathbf{t} d\Gamma \quad , \quad \mathbf{b} = [b_1, b_2]^T \quad , \quad \mathbf{t} = [t_1, t_2]^T \end{aligned} \quad (24)$$

con $i, j = 1, n$ y $k, l = 1, 2$.

Como es usual, las tensiones desviadoras s_{ij} están relacionadas con las velocidades de deformación $\dot{\epsilon}_{ij}$ por la Ec.(5).

Puede demostrarse que el sistema de las Ecs.(22) conduce a una solución numérica estabilizada [Oñate *et al.* (2003)].

Comentario 1

La Ec.(22a) puede escribirse de una forma más explícita in función de las velocidades y las variables de presión como

$$\mathbf{M}\dot{\bar{\mathbf{v}}} + \mathbf{K}\bar{\mathbf{v}} - \mathbf{G}\bar{\mathbf{p}} - \mathbf{f} = 0 \quad (25)$$

donde

$$\mathbf{K}_{ij} = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j d\Omega \quad (26)$$

siendo \mathbf{D} la matrix constitutiva. Para problemas 2D

$$\mathbf{D} = \mu \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (27)$$

5 MÉTODO DE PASOS FRACCIONADOS PARA ANÁLISIS DE PROBLEMAS DE INTERACCIÓN FLUIDO-ESTRUCTURA

Se puede obtener un algoritmo iterativo simple y efectivo separando la presión de las ecuaciones de cantidad de movimiento como sigue

$$\bar{\mathbf{v}}^* = \bar{\mathbf{v}}^n - \Delta t \mathbf{M}^{-1} [\mathbf{g}^{n+\theta_1,j} - \mathbf{f}^{n+1}] \quad (28a)$$

$$\bar{\mathbf{v}}^{n+1,j} = \bar{\mathbf{v}}^* + \Delta t \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G} \delta \bar{\mathbf{p}} \quad (28b)$$

En la Ec.(28a)

$$\mathbf{g}^{n+\theta_1,j} = \int_{\Omega^{n+\theta_1,j}} \mathbf{B}^T [\mathbf{s}^{n+\theta_1,j} - \alpha \mathbf{m}^T p^n] d\Omega$$

donde α es una variable que toma los valores uno o cero. Para $\alpha = 0$, $\delta p \equiv p^{n+1,j}$ y para $\alpha = 1$, $\delta p = \Delta p$. Adviértase que ambos casos que la suma de las Ecs.(28a) y (28b) da la discretización en el tiempo de las ecuaciones de cantidad de movimiento con las presiones calculadas en t^{n+1} .

En las ecuaciones anteriores y en las que siguen, el índice j denota un número de iteraciones dentro de cada paso de tiempo.

El valor de $\bar{\mathbf{v}}^{n+1,j}$ de la Ec.(28b) se substituye ahora en la Ec.(22b) para dar

$$\mathbf{G}^T \bar{\mathbf{v}}^* + \Delta t \mathbf{G}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G} \delta \bar{\mathbf{p}} + \mathbf{L} \bar{\mathbf{p}}^{n+1,j} + \mathbf{Q} \bar{\boldsymbol{\pi}}^{n+\theta_2,j} = \mathbf{0} \quad (29a)$$

El producto $\mathbf{G}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G}$ puede aproximarse por una matriz laplaciana, es decir

$$\mathbf{G}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G} = \hat{\mathbf{L}} \quad \text{with } \hat{L}_{ij} \simeq \int_{\Omega^e} \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\nabla}^T N_i \boldsymbol{\nabla} N_j d\Omega \quad (29b)$$

En las ecuaciones anteriores θ_1 y θ_2 son parámetros algorítmicos que varían entre cero y uno. En lo que sigue se discute la selección de θ_1 y θ_2 .

Se puede obtener un algoritmo semi-implícito como sigue. Para cada iteración

A semi-implicit algorithm can be derived as follows. For each iteration:

Etapla 1 Calcular \mathbf{v}^* de la Ec.(28a) con $\mathbf{M} = \mathbf{M}_d$ donde el subíndice d indica a partir de ahora una matriz diagonal.

Etapla 2 Calcular $\delta \bar{\mathbf{p}}$ y $\bar{\mathbf{p}}^{n+1}$ de la Ec.(29a) como

$$\delta \bar{\mathbf{p}} = -(\mathbf{L} + \Delta t \hat{\mathbf{L}})^{-1} [\mathbf{G}^T \bar{\mathbf{v}}^* + \mathbf{Q} \bar{\boldsymbol{\pi}}^{n+\theta_2,j} + \alpha \mathbf{L} \bar{\mathbf{p}}^n] \quad (30a)$$

La presión $p^{n+1,j}$ se calcula como sigue

$$\begin{aligned} \text{For } \alpha = 0 \quad & \bar{\mathbf{p}}^{n+1,j} = \delta \bar{\mathbf{p}} \\ \text{For } \alpha = 1 \quad & \bar{\mathbf{p}}^{n+1,j} = \bar{\mathbf{p}}^n + \delta \bar{\mathbf{p}} \end{aligned} \quad (30b)$$

Etapla 3 Calcular $\bar{\mathbf{v}}^{n+1,j}$ de la Ec.(28b) con $\mathbf{M} = \mathbf{M}_d$

Etapla 4 Calcular $\bar{\boldsymbol{\pi}}^{n+1,j}$ de la Ec.(22c) como

$$\bar{\boldsymbol{\pi}}^{n+1,j} = -\hat{\mathbf{M}}_d^{-1} \mathbf{Q}^T \bar{\mathbf{p}}^{n+1,j} \quad (31)$$

Etapa 5 Calcular el movimiento de la estructura debido a las fuerzas del fluido.

Esto implica resolver las ecuaciones dinámicas para movimiento de la estructura escritas como

$$\mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{K}_s \mathbf{d} = \mathbf{f}_{\text{ext}} \quad (32)$$

donde \mathbf{d} y $\ddot{\mathbf{d}}$ son respectivamente los vectores de desplazamiento y aceleración de los nodos que discretizan la estructura, \mathbf{M}_s y \mathbf{K}_s son las matrices de masa y rigidez de la estructura y \mathbf{f}_{ext} es el vector de fuerzas nodales externas que tienen en cuenta las fuerzas del fluido inducidas por la presión y las tensiones viscosas. Claramente las fuerzas principales que conducen el movimiento de la estructura son debidas a la presión del fluido que actúa como una fuerza de contorno normal a la superficie sobre la estructura. Ciertamente la Ec.(32) puede aumentarse con un término de disipación adecuado. La forma de las matrices y vectores para el problema estructural puede encontrarse en los libros estándar de cálculo de estructuras por el MEF [Zienkiewicz and Taylor (2000)].

La solución de la Ec.(32) en el tiempo puede realizarse utilizando algoritmos de integración en el tiempo implícito o completamente explícito. En ambos casos se pueden encontrar los valores de los desplazamientos nodales, velocidades y aceleraciones de la estructura en t^{n+1} para la iteración j th.

Etapa 6

Actualizar los nodos de la malla de forma Lagrangiana. De la definición de la velocidad $v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}$ se deduce

$$\mathbf{x}_i^{n+1,j} = \mathbf{x}_i^n + \bar{\mathbf{v}}_i^{n+1,j} \Delta t \quad (33)$$

Etapa 7

Generar una nueva malla. Esto puede realizarse efectivamente utilizando el procedimiento descrito en el Apartado 6.

Etapa 8

Comprobar la convergencia de los campos de velocidad y de presión en el fluido y los desplazamientos de tensiones y deformaciones en la estructura. Si se ha obtenido la convergencia iniciar el cálculo para el próximo paso de tiempo, de otra manera volver a la etapa 1 para la siguiente iteración con $j + 1 \rightarrow j$.

Pese a que los nodos se mueven dentro del proceso iterativo, en general, no hay necesidad de regenerar la malla en cada iteración. Se genera típicamente una malla después de que hayan convergido un número de pasos de tiempo, o cuando los desplazamientos nodales inducen distorsiones geométricas importantes en algunos elementos. *En los ejemplos que se presentan en este trabajo, la malla en el dominio del fluido se ha regenerado en cada paso de tiempo.*

Las condiciones de contorno se aplican como sigue. No se aplica ninguna condición para calcular de las velocidades fraccionales \mathbf{v}^* en la Ec.(28a). Las velocidades prescritas en el contorno se aplican cuando se resuelven para $\bar{\mathbf{v}}^{n+1,j}$ en la etapa 3. Las presiones prescritas en el contorno se imponen haciendo cero los incrementos de presión en los nodos del contorno relevantes, y haciendo $\bar{\mathbf{p}}^n$ igual a las presiones prescritas.

Los detalles del tratamiento de las condiciones de contorno en la interfase fluido-sólido se dan en el Apartado 8 [Idelsohn *et al.* (2004)].

Adviértase que la solución de las etapas 1, 3 y 4 no requiere resolver un sistema de ecuaciones ya que se utiliza una forma diagonal para las matrices \mathbf{M} y $\hat{\mathbf{M}}$. El proceso de solución dentro de cada paso de tiempo puede linearizarse escogiendo $\theta_1 = \theta_2 = 0$ y en este caso no es necesario el bucle de iteración. La solución implícita para $\theta_1 = \theta_2 = 1$ es sin embargo más efectiva ya que pueden utilizarse incrementos de tiempo mayores. Esto requiere realizar varias iteraciones dentro de las etapas 1–8 hasta que se obtienen los valores convergidos para las variables del fluido y del sólido y para la nueva posición de los nodos de la malla en el tiempo $n + 1$.

En los ejemplos que se presentan en este trabajo se ha utilizado el siguiente incremento de tiempo

$$\Delta t = \min(\Delta t_i) \quad \text{with} \quad \Delta t_i = \frac{|\mathbf{v}|}{h_i^{\min}} \quad (34)$$

donde h_i^{\min} es la distancia entre el nodo i y el nodo más cercano en la malla.

Comentario 2

Aunque no se ha mencionado explícitamente, todas las matrices y vectores en las Ecs.(28)–(32) se calculan en la configuración final $\Omega^{n+1,j}$. Esto implica que el dominio de integración cambia dentro cada iteración, y, por consiguiente, todos los términos en los que involucran las derivadas espaciales deben actualizarse en cada iteración. Este problema desaparece si se toma Ω^n como la configuración de referencia ($\theta_1 = 0$) ya que ésta permanece fija durante las iteraciones. La dificultad en este caso es que hay que calcular la matriz jacobiana en cada iteración [Aubry *et al.* (2004)].

6 TRATAMIENTO DE CONTACTO ENTRE LAS INTERFASES DEL FLUIDO Y DEL SÓLIDO

La condición de velocidades o presiones prescritas en los contornos del sólido puede aplicarse en el PFEM en forma fuerte a los nodos del contorno. Estos nodos pueden pertenecer a contornos exteriores fijos, o a contornos móviles relacionados o vinculados a los sólidos que interactúan con el fluido. En algunos problemas es útil definir una capa de nodos adyacente al contorno exterior en el fluido donde se impone la condición de velocidad prescrita. Estos nodos típicamente permanecen fijos durante el proceso de solución. El contacto entre las partículas de agua y los contornos de sólido se tiene en cuenta a través de la condición de incompresibilidad, que *previene de forma natural que los nodos de agua penetren en los contornos de sólido*. Esta forma sencilla de tratar el contacto entre el agua y las paredes del sólido es otra característica atractiva de la formulación PFEM.

7 GENERACIÓN DE UNA MALLA NUEVA

Uno de los puntos clave para el éxito de la formulación de fluidos Lagrangianos que aquí se describen es la rápida regeneración de una malla en cada paso de tiempo a partir de la posición de los nodos en el dominio espacial. En nuestro trabajo hemos generado la malla utilizando la denominada teselación extendida de Dalaunay presentada en [Idelsohn *et al.*

(2003a; 2003c; 2004)]. El método EDT permite generar mallas no estándar combinando elementos de formas polihédricas arbitrarias (triángulos, cuadriláteros y otros polígonos en 2D y tetrahedra, hexahedra y polihedros arbitrarios en 3D) en un tiempo de cálculo n , donde n es el número total de nodos en la malla (Figura 3). Las funciones de forma continua C^0 de los elementos pueden obtenerse sencillamente utilizando la denominada formulación de la interpolación de los elementos finitos sin malla (MFEM) [Idelsohn *et al.* (2003a; 2003c; 2004)].

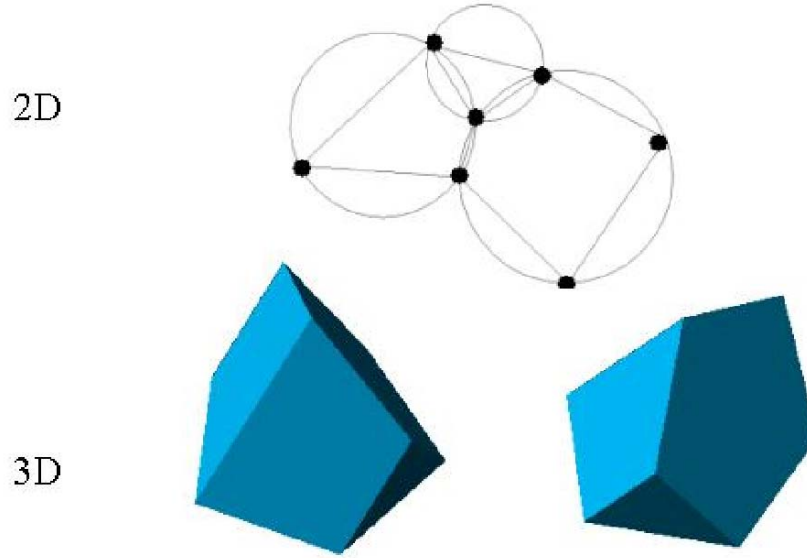


Figura 3. Generación de mallas no estándar combinando diferentes polígonos (en 2D) y poliedros (en 3D) utilizando la técnica de Delaunay extendida.

Una vez que se ha generado la malla en cada paso de tiempo se aborda la solución numérica utilizando el algoritmo de pasos fraccionados descritos en el apartado previo.

La combinación de elementos con formas geométricas diferentes en la misma malla es otro de los aspectos innovadores de la formulación Lagrangiana que aquí se presenta.

8 IDENTIFICACIÓN DE LOS CONTORNOS

Una de las principales etapas en el PFEM es la definición correcta de los contornos. A veces los nodos de contorno se definen explícitamente como tales de manera diferente de los contornos en el interior de dominio. En otros casos, solo se dispone de la información del conjunto total de nodos y algoritmo debe reconocer los nodos de contorno.

La utilización de la partición de Delaunay extendida facilita reconocer los nodos de contorno.

Considerando que los nodos siguen una distribución variable $h(x)$, siendo $h(x)$ la distancia mínima entre dos nodos, se ha utilizado el siguiente criterio para identificar nodos de contorno. Para todos los nodos se busca el círculo (la esfera en 3D) de radio αh que los contiene. Todo par de nodos contenido en un círculo que no contenga otro nodo en su interior se consideran nodos de contorno. En la práctica, α es un parámetro cercano a, pero mayor que uno. Adviértase que este criterio es muy similar al método Alpha Shape [Edelsbrunner and Mücke (1999)].

Una vez que se ha decidido qué nodos están sobre los contornos, debe definirse la superficie de contorno. En este trabajo dicha superficie se ha definido por todas las superficies polihédricas

(o polígonos en 2D) que tienen todos sus nodos sobre el contorno y que pertenecen a un único poliedro.

La Figura 4 muestra ejemplos de la técnica de reconocimiento de contornos utilizando el método de Alpha Shape.

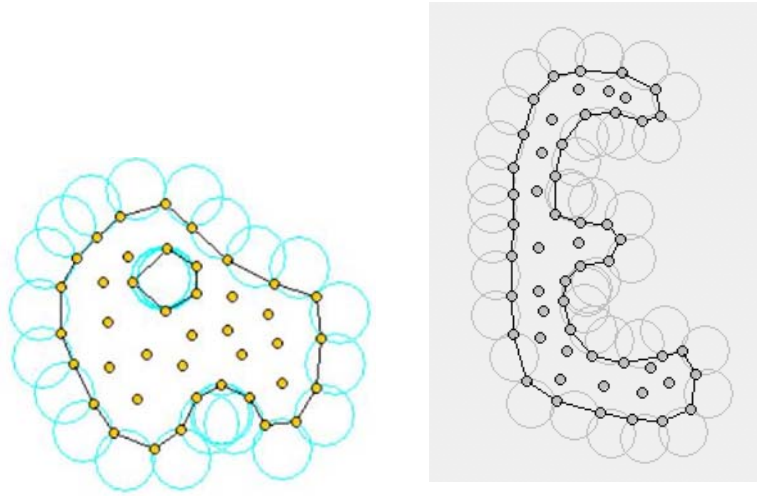


Figura 4. Ejemplos de reconocimiento del contorno con el método de Alpha Shape. Los círculos de radio mayor que $\alpha h(x)$ y que no contienen nodos en su interior definen los nodos de contorno.

La definición correcta del contorno es muy importante para definir la normal externa a la superficie de contorno. Además, en formas débiles (Galerkin) como las aquí utilizadas es muy importante una evaluación correcta del volumen del dominio. En el criterio aquí utilizado, el error en la definición de la superficie de contorno es proporcional a h lo que es un error aceptable. La única forma de obtener una superficie de contorno más precisa es reduciendo la distancia entre los nodos.

El método descrito permite también identificar las partículas de fluido aisladas fuera del dominio principal del fluido. Estas partículas se tratan como parte del contorno exterior donde la presión se fija a el valor atmosférico.

La Figura 5 muestra un ejemplo esquemático del proceso para identificar las partículas individuales (o un grupo de partículas) comenzando de una colección dada de nodos. Una aplicación práctica del método para identificar las partículas de la superficie libre se muestra en la Figura 6. El ejemplo corresponde al análisis del movimiento de un fluido dentro de un recipiente de forma elipsoide oscilante. Adviértase que el método captura las gotas de agua individuales que se separan de la superficie libre durante la oscilación del recipiente.

9 MODELIZACIÓN DE UNA ESTRUCTURA “RÍGIDA” COMO UN FLUIDO VISCOSO

Una forma simple y efectiva para analizar un movimiento de sólidos rígidos en interior de fluidos con la formulación Lagrangiana descrita anteriormente, es modelar el sólido como un fluido con una viscosidad mucho mayor que la del fluido que le rodea. Puede aplicarse entonces el esquema de pasos fraccionados del Apartado 5 sin incluir la etapa 5 y resolver al mismo tiempo para el movimiento simultáneo de ambos dominios de fluido (el fluido real y el fluido ficticio que modela el cuerpo cuasi-rígido).

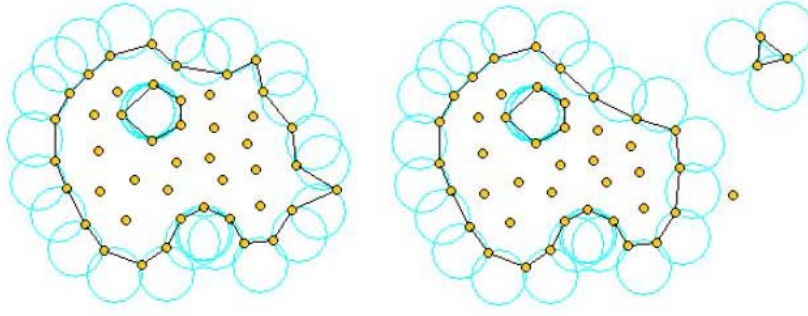
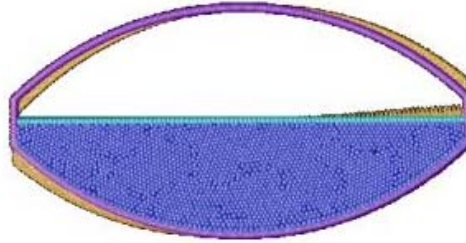


Figura 5. Identificación de partículas individuales (o un grupo de partículas) partiendo de una colección dada de nodos.

(a)



(b)

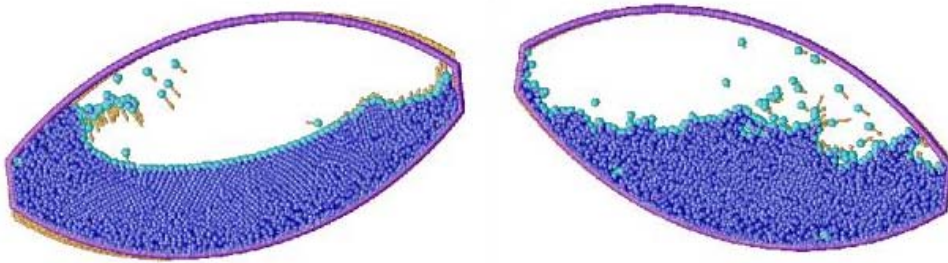


Figura 6. Movimiento de un líquido sobre un recipiente oscilante. (a) Distribución original de partículas (nodos) antes de la oscilación. (b) Posición de las partículas del líquido en dos tiempos diferentes. Las partículas de contorno que representan la superficie libre, las gotas de líquido y las paredes del recipiente se representan con un color más pálido. Las flechas denotan los vectores de velocidad para cada partícula.

Ciertamente este procedimiento puede extenderse para incluir la deformación elástica del sólido tratado ahora como un fluido visco-elástico. Esto introducirá, sin embargo, alguna complejidad en la formulación y es preferible en este caso utilizar el esquema de interacción fluido-estructura totalmente acoplado descrito en el Apartado 5.

10 EJEMPLOS

Los ejemplos muestran la aplicabilidad del PFEM para resolver problemas de interés en el ámbito de la ingeniería de puertos. Los ejemplos se han resuelto con el algoritmo de pasos fraccionados aplicado $\theta_1 = \theta_2 = 1$ y $\alpha = 1$.

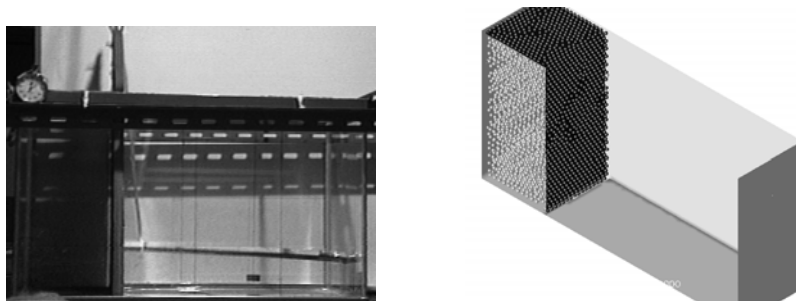


Figura 7. Simulación de un ensayo de rotura de un recipiente prismático lleno de agua. Malla utilizada para la solución 3D por el PFEM

10.1 Colapso de una columna de agua

El primer problema es el estudio del colapso de una columna de agua. Este problema se resolvió experimentalmente por Koshizu and Oka (1996). Se ha convertido en un clásico para validar la formulación Lagrangiana en fluidos. El agua permanece inicialmente encerrada en un recipiente rectangular (Figura 7). Las condiciones de contorno son de velocidad cero en las paredes y presión atmosférica (de valor cero) en la superficie libre. La Figura 7 muestra la malla 3D que discretiza el dominio de agua y las paredes del recipiente. Se destaca que el método permite seguir el movimiento de la columna de agua y la separación de partículas. El colapso comienza en el tiempo $t = 0$ al eliminar la pared derecha del recipiente. La Figura 8 muestra la evolución de los puntos del fluido en diferentes pasos de tiempo. Los puntos negros indican la superficie libre del agua detectado con el algoritmo descrito en el texto. Se muestran también en negro los puntos fijos del contorno detectados también con el mismo algoritmo.

El agua evoluciona sobre el fondo hasta que tras 0.3 segundos impacta sobre la pared vertical derecha. La ola de retorno se inicia a unos 0.6 seg. y después de 1 seg. la ola alcanzó de nuevo la pared izquierda. En la Figura 9 se compara la solución obtenida con el PFEM utilizando tres mallas de tamaños diferentes. Es interesante que para las tres mallas, los resultados coincidan muy bien con los experimentales de Koshizuka and Oka (1996), tanto en la forma de la superficie libre como en su evolución.

En la Figura 10 se muestra la solución 3D del mismo problema.

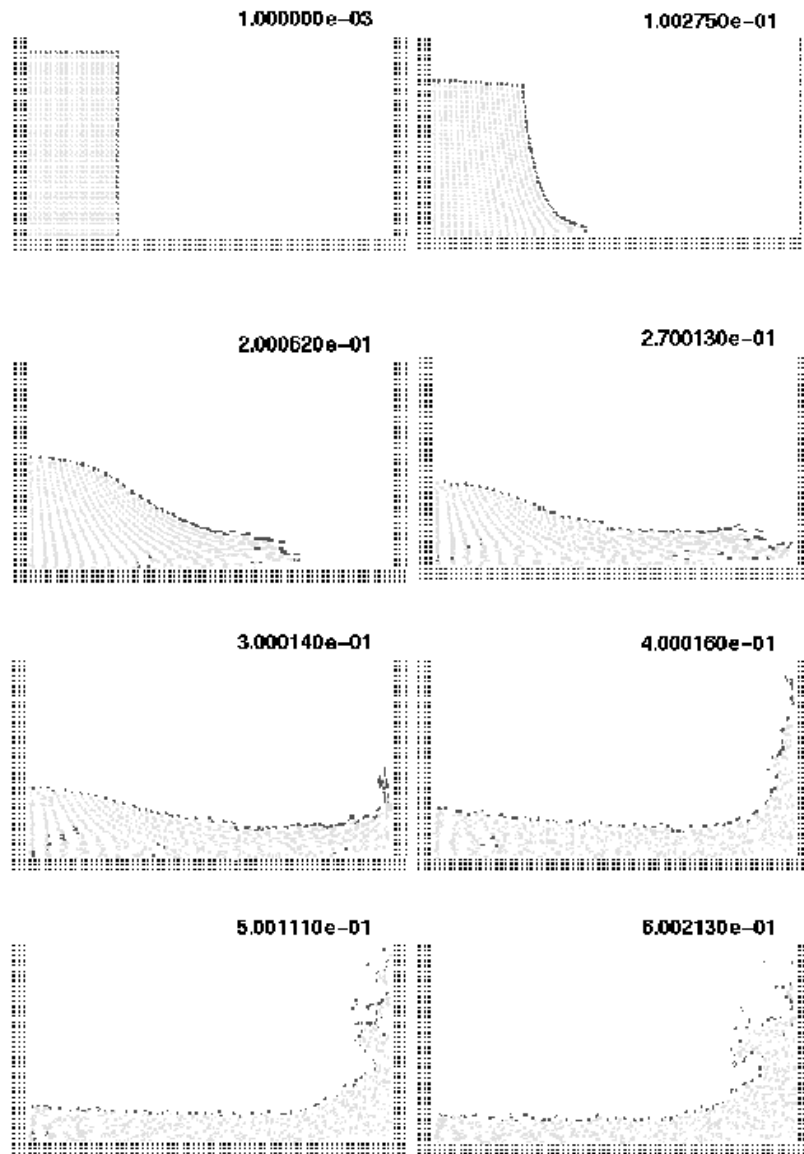


Figura 8. Colapso de una columna de agua en diferentes pasos de tiempo.

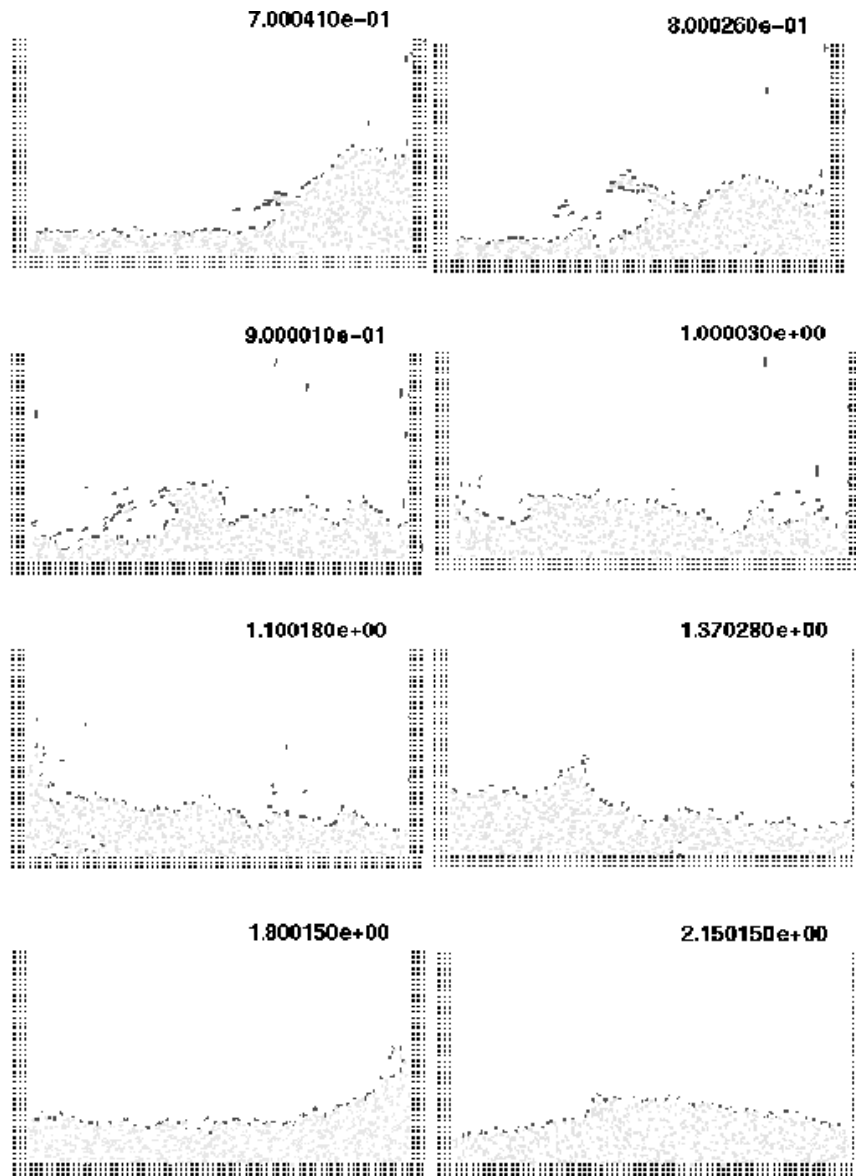


Figura 8. cont.

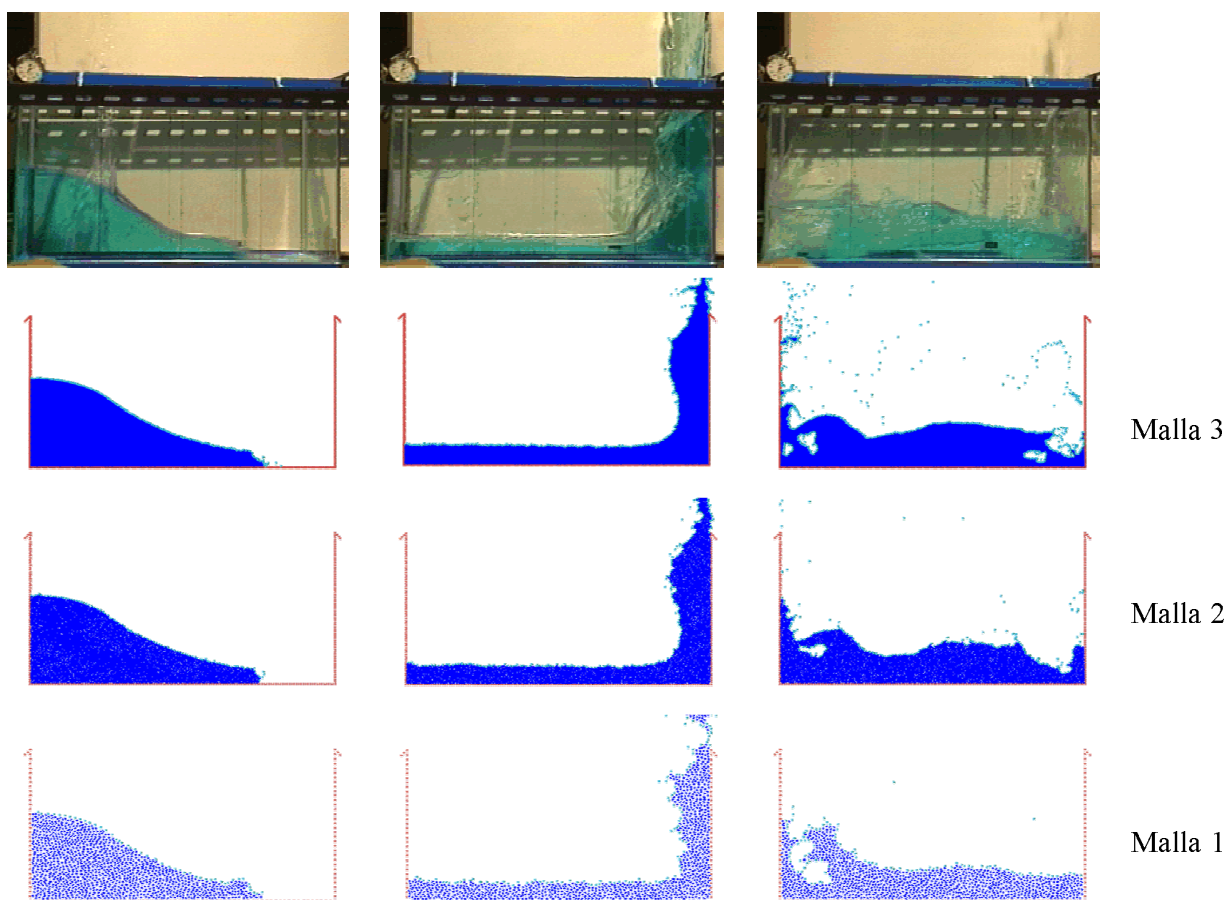
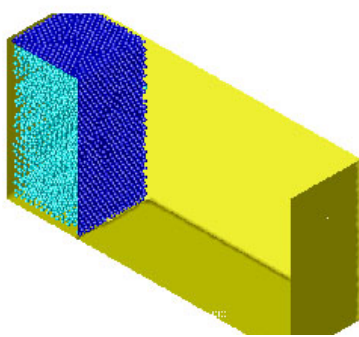
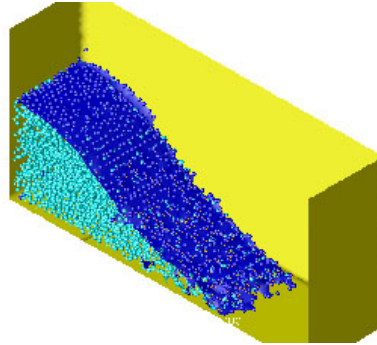


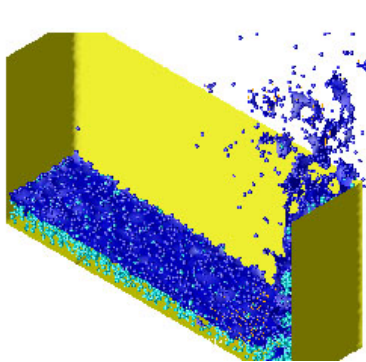
Figura 9. Rotura de un recipiente prismático lleno de agua. Comparación de los resultados obtenidos con tres mallas distintas en tres tiempos diferentes con las medidas experimentales.



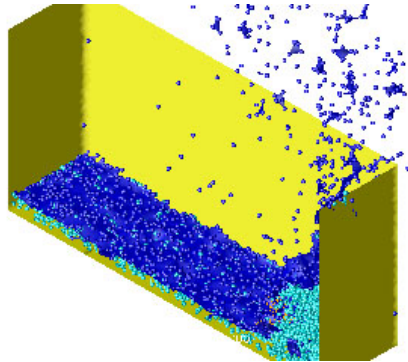
a) $t = 0$ sec.



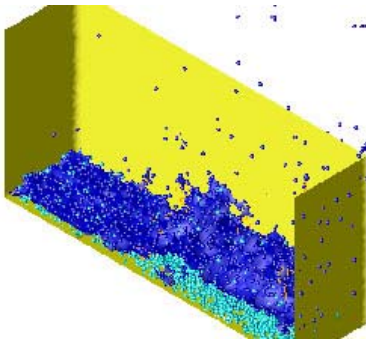
b) $t = 0.2$ sec.



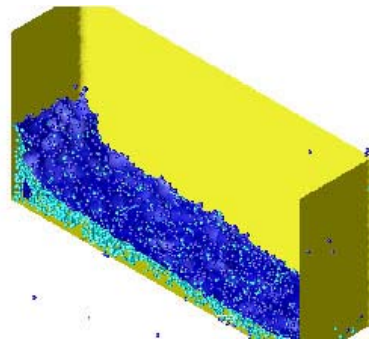
c) $t = 0.4$ sec.



d) $t = 0.6$ sec.



e) $t = 0.8$ sec.



f) $t = 1.1$ sec.

Figura 10. Colapso de una columna de agua en un dominio 3D.

10.2 Problemas de agitación de agua en tanques

En la Figura 11 se muestra un ejemplo sencillo del análisis 2D de la oscilación libre del agua en un tanque cilíndrico. En la Figura 12 se muestra la distribución de puntos utilizada al inicio del análisis. En la Figura 12 se muestra la comparación de la amplitud obtenida con una solución analítica para un fluido casi-no viscoso. Los resultados del PFEM comparan muy bien con los analíticos en las oscilaciones iniciales cuando el efecto de la viscosidad no es todavía importante.

En la Figura 13 se muestra otro ejemplo de grandes oscilaciones de agua en un tanque cilíndrico. En este caso no se dispone de una solución analítica para comparación.

En la Figura 14 se muestra un caso similar de oscilación en un dominio 3D.

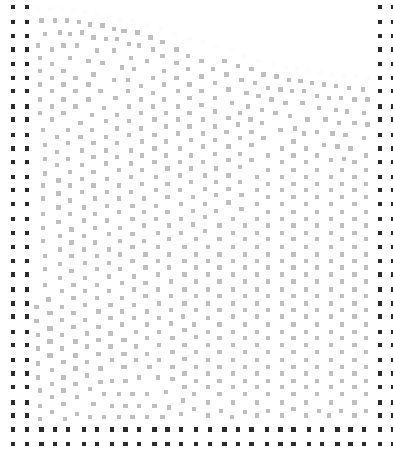


Figura 11. Agitación del agua en un tanque cilíndrico. Distribución inicial de puntos.

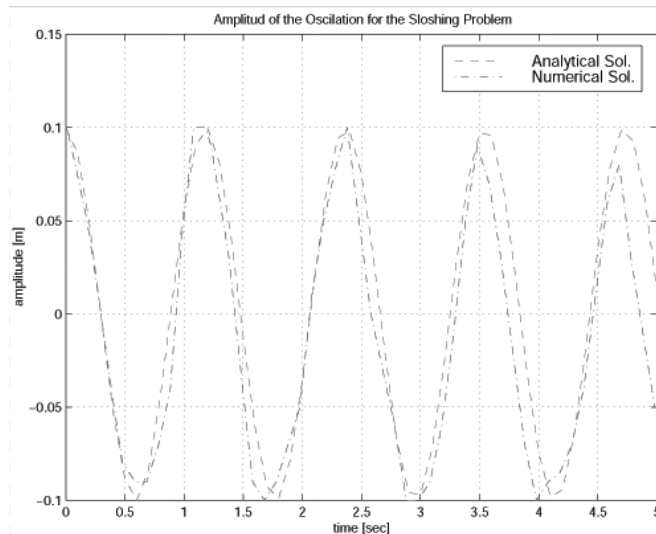


Figura 12. Agitación del agua en un tanque cilíndrico. Comparación de la evolución de la amplitud de la oscilación obtenida analíticamente y con el PFEM.

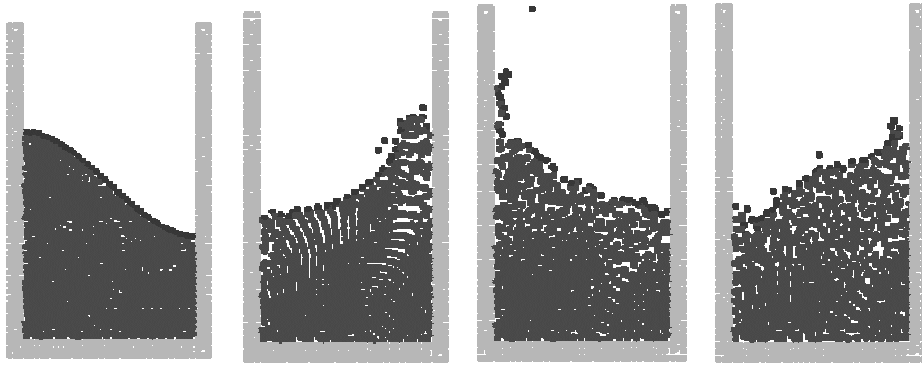


Figura 13. Resultados obtenidos con el PFEM para un problema de oscilaciones de agua de gran amplitud dentro de un recipiente cilíndrico.

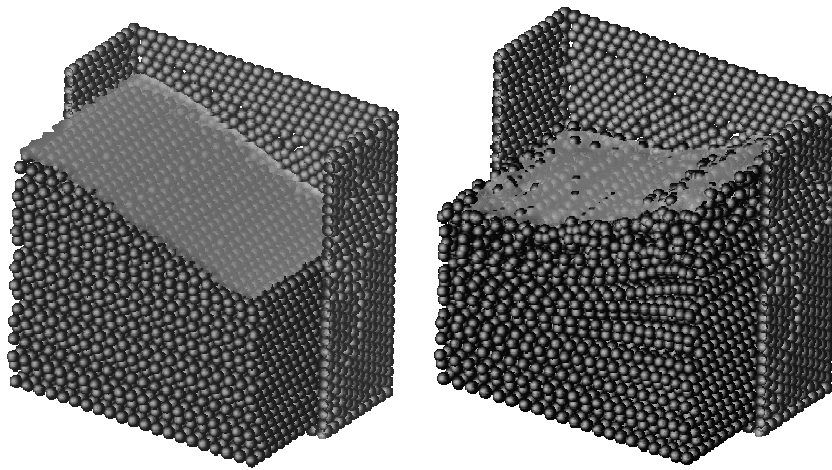


Figura 14. Problema de agitación de agua en un recipiente prismático.

En las Figuras 15–21 se muestran resultados del estudio de agitación en un tanque de gas licuado. Se ha estudiado el efecto de incluir o no el efecto del aire en el análisis. Los resultados de la evolución de la presión sobre la pared (Figura 19) muestran que en este problema la consideración del efecto del aire no es necesaria.

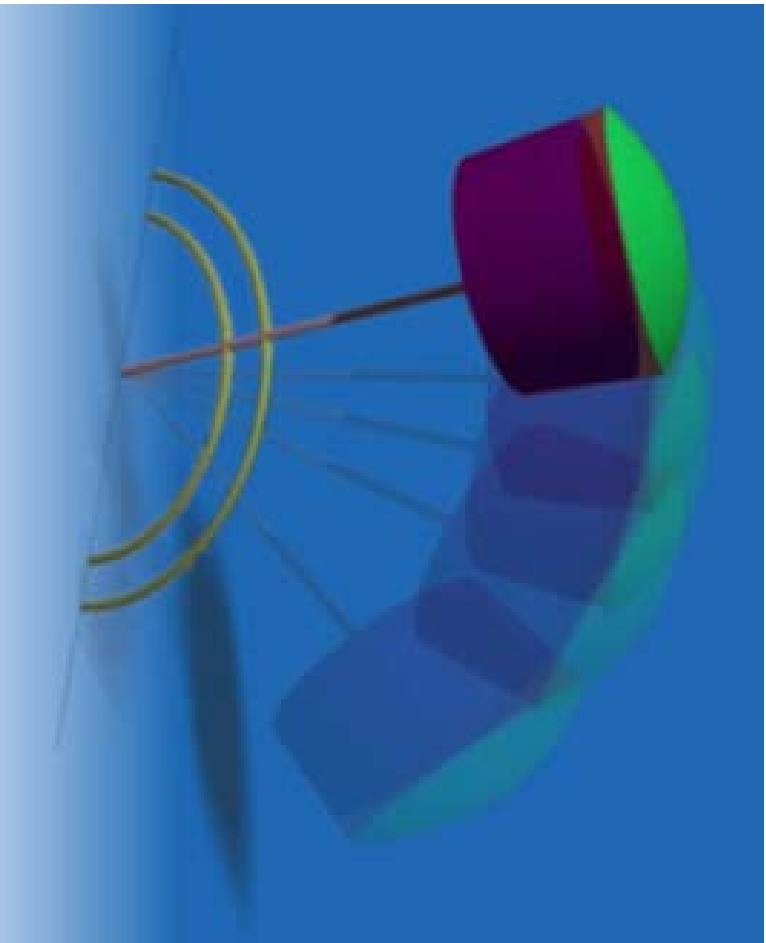


Figura 15. Análisis de la oscilación de gas licuado en un tanque cilíndrico.

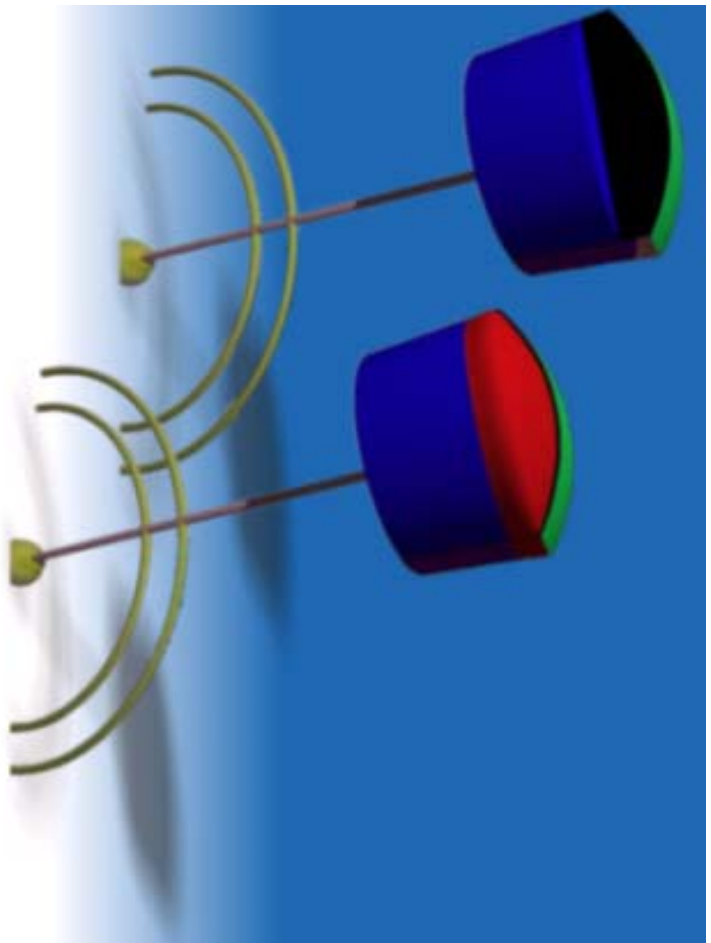
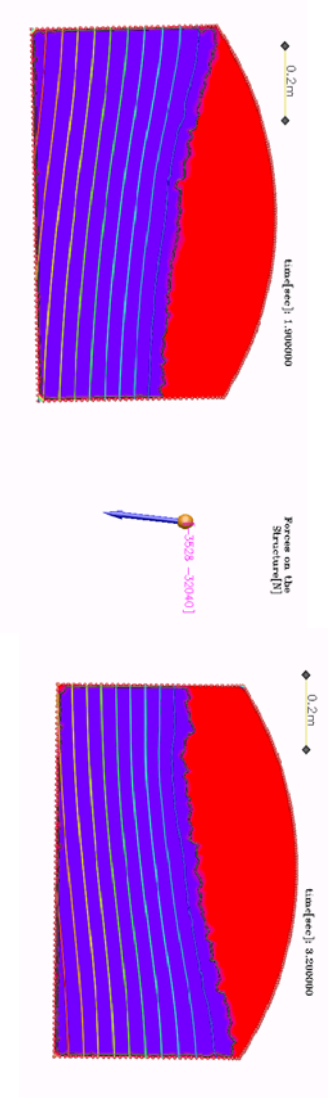
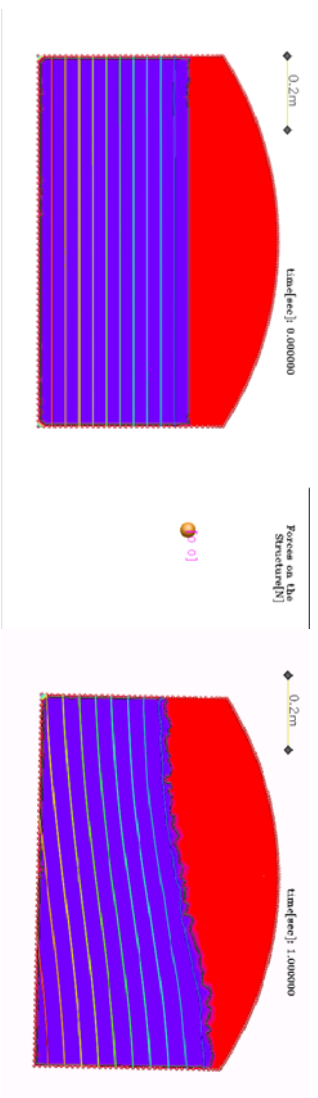
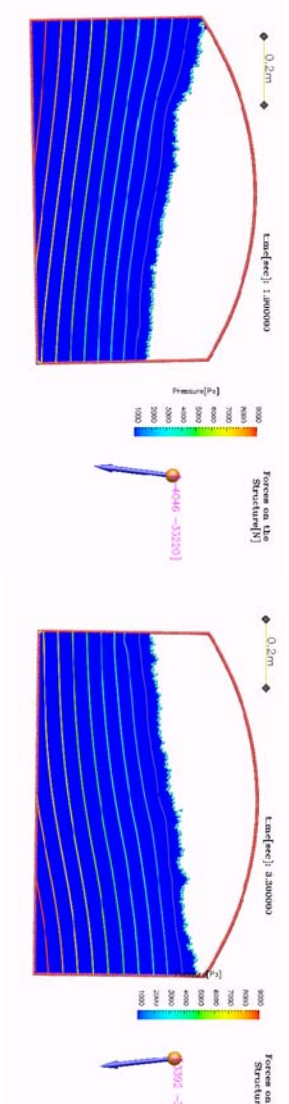
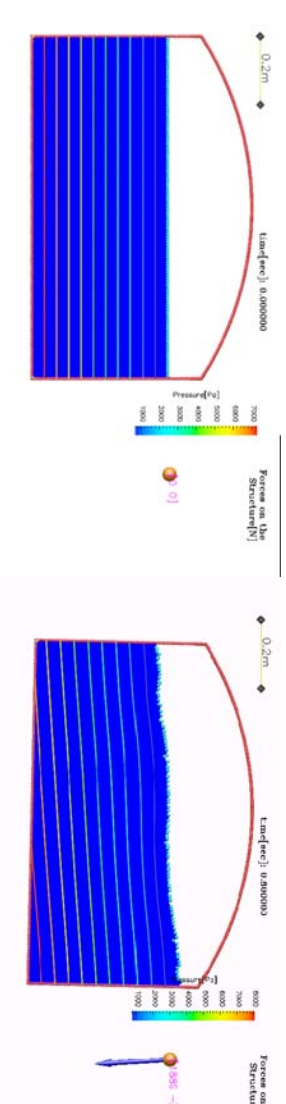


Figura 16. Estudio del efecto de incluir o no el aire en el estudio de oscilación de gas licuado en un tanque cilíndrico.



Bi-Phasic Flow in Two Dimensions 2D

Figura 17. Resultados 2D de las oscilación de gas licuado en un tanque incluyendo el efecto del aire en el análisis.



Mono-Phasic Flow in Two Dimensions 2D

Figura 18. Resultados 2D de las oscilación de gas licuado en un tanque sin incluir el efecto del aire en el análisis.

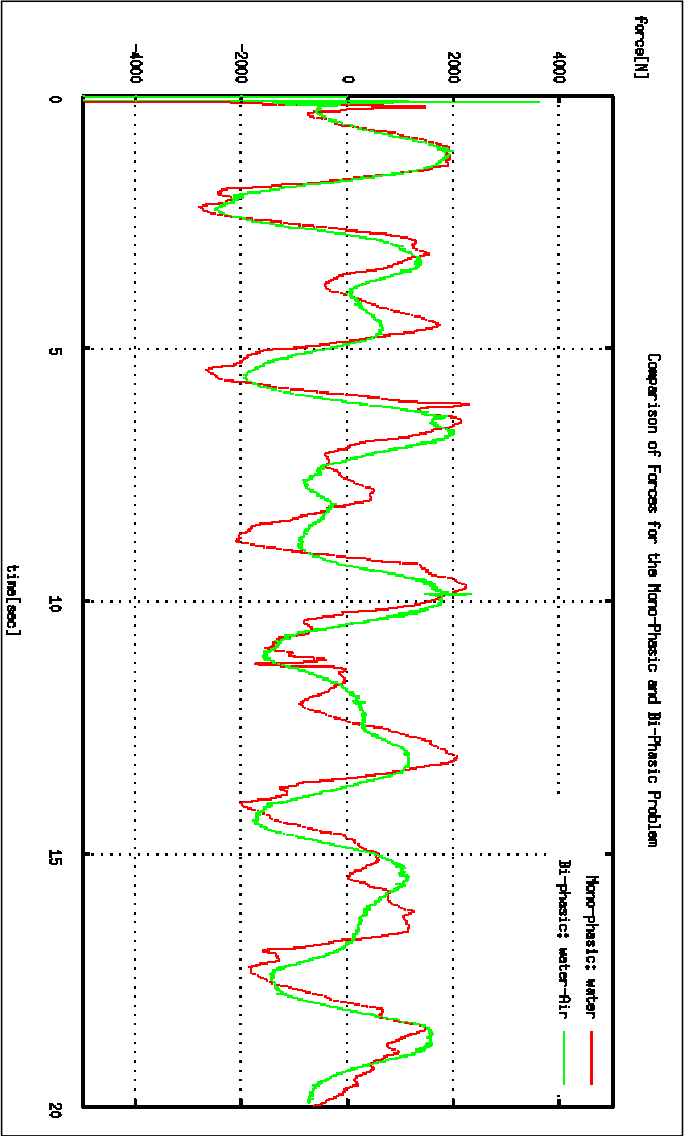
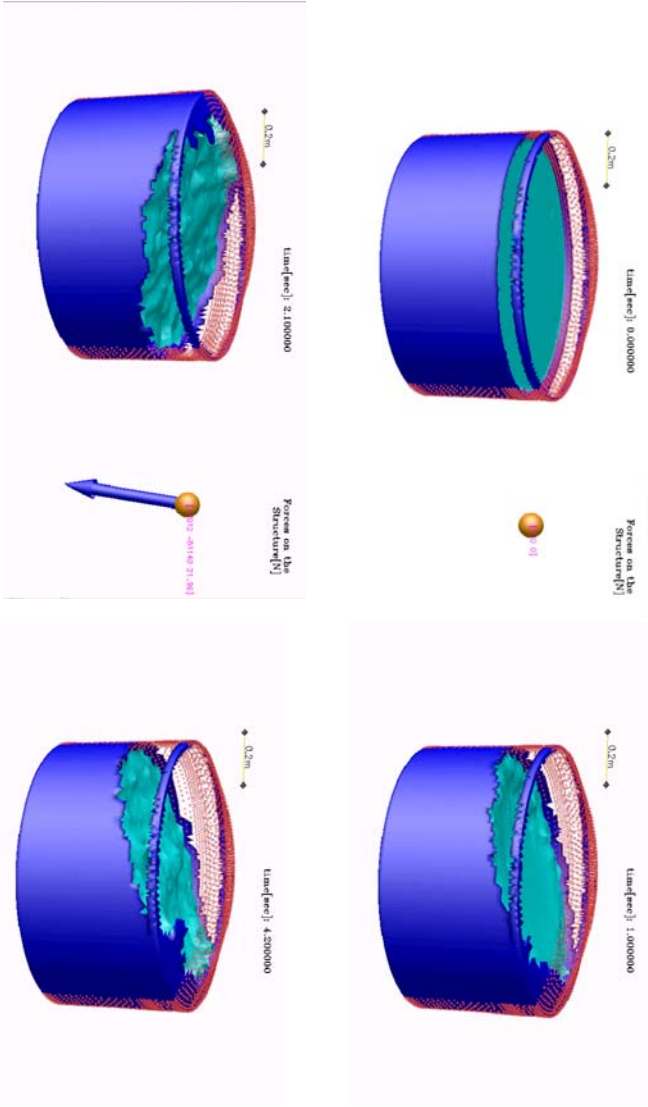
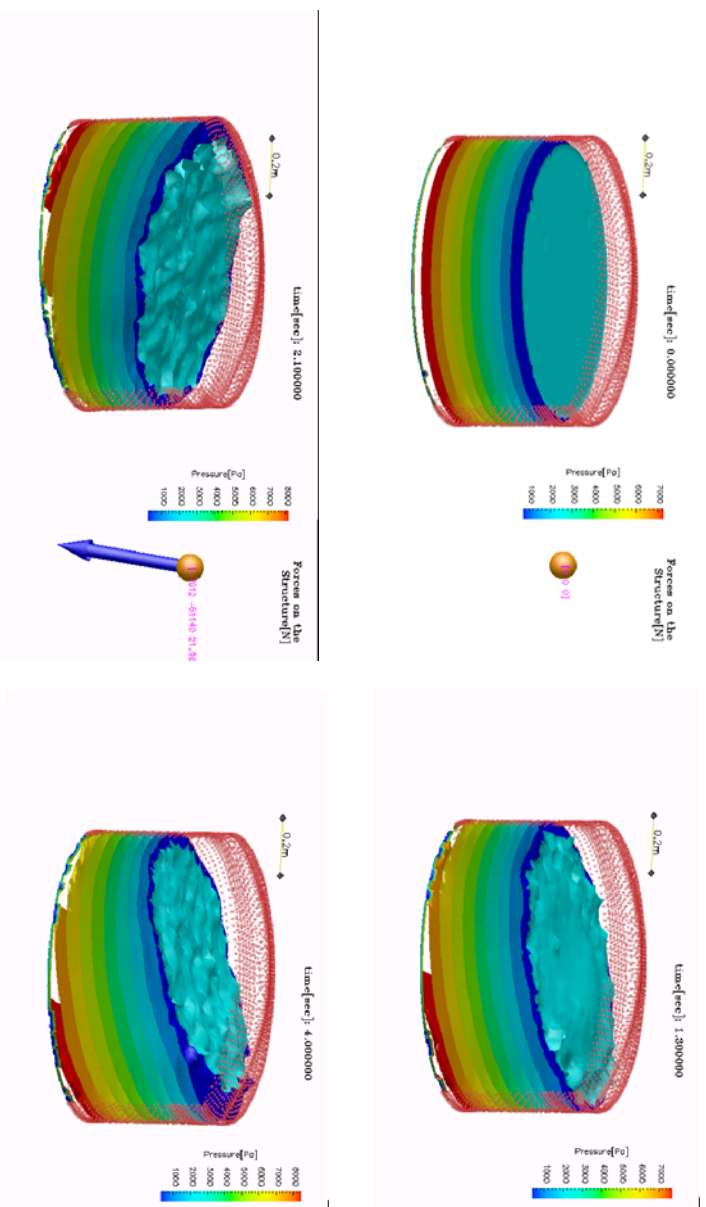


Figura 19. Comparación de la evolución de las fuerzas total sobre la pared de un tanque cilíndrico incluyendo y sin incluir el efecto del aire en el estudio.



Mono-Phasic Three Dimensional Sloshing

Figura 20. Análisis 3D de la agitación de gas licuado en un tanque cilíndrico. Evolución de la superficie libre en diferentes instantes.



Mono-Phasic Three Dimensional Sloshing

Figura 21. Análisis 3D de la agitación de gas licuado en un tanque cilíndrico. Mapa de presiones y distribución de la superficie libre en varios instantes.

10.3 Rotura de olas sobre la playa

En las Figuras 23 y 24 se muestra un ejemplo de simulación con el PFEM de la propagación de una ola sobre un plano inclinado y su rotura sobre la playa. Se muestra también la comparación con una solución analítica, apreciándose la concordancia entre ambas soluciones (en amplitud y fase) hasta el momento de la rotura en la playa, efecto que solo puede ser modelado con el PFEM.

En la Figura 25 se muestra la solución 3D del problema de la propagación de una ola que parte de una posición oblicua con respecto a la playa. Al entrar en la zona de pendiente, se acelera la cresta de la ola hasta que se corrige totalmente la posición oblicua y la ola rompe paralela a la playa. Se reproduce bien también el efecto de avance y retroceso del frente de la ola al acercarse a la orilla.



Figura 22. Ola de gran tamaño rompiendo sobre una playa.

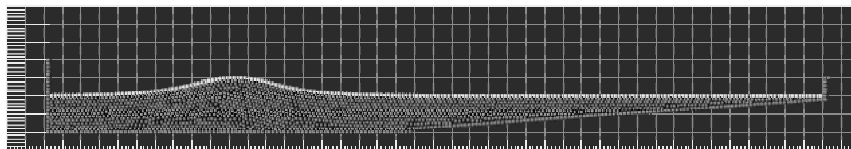


Figura 23. Análisis 2D de la rotura de una ola sobre la playa. Vista general de la distribución de puntos en un instante.

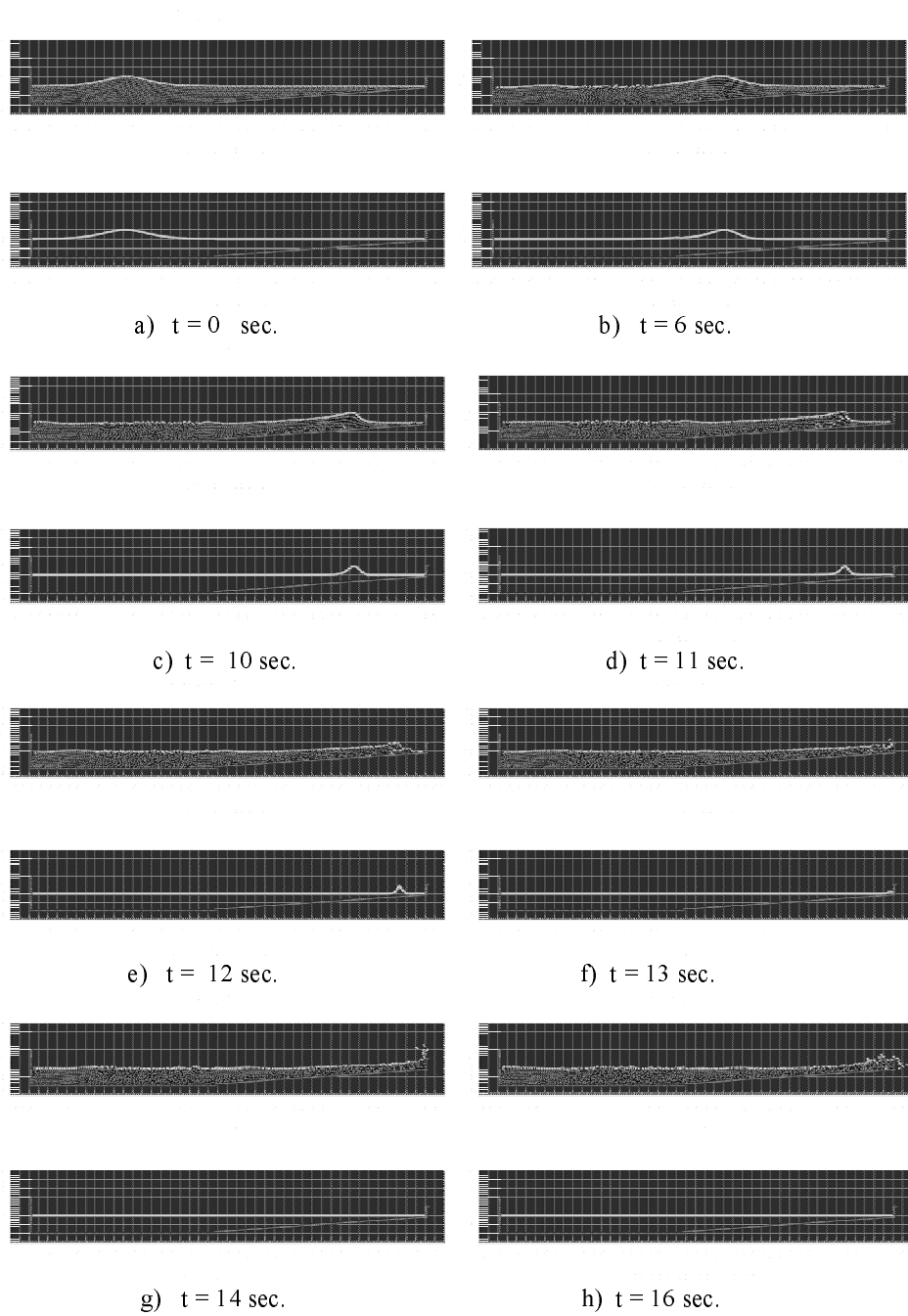


Figura 24. Análisis 2D de la rotura de una ola sobre una playa. Comparación de la evolución de la cresta de la ola con resultados analíticos en diferentes instantes. Figura superior: resultados del PFEM. Figura inferior: solución analítica.

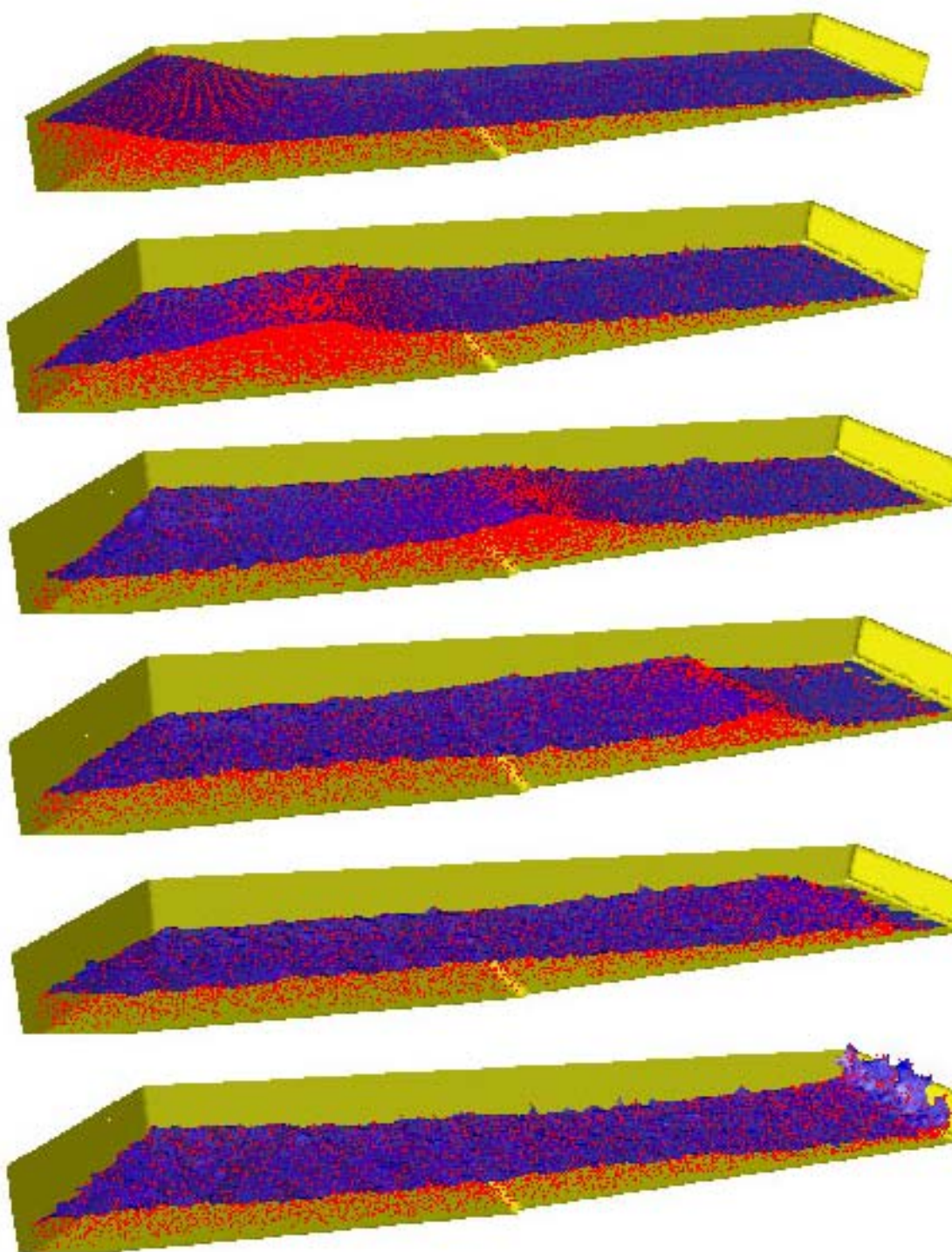


Figura 25. Análisis 3D de la progresión de una ola oblicua y su rotura sobre la playa.

10.4 Modelización de objetos rígidos cayendo en el agua

El análisis con precisión del momento de objetos en el agua es de gran importancia en muchos ámbitos de la ingeniería portuaria, marítima y naval entre otras.

En la Figura 26 se muestra la evolución de la penetración de un sólido de forma cúbica en el agua. El estudio se ha realizado en 2D modelando el sólido como un fluido de alta viscosidad.

En la Figura 27 se estudia un problema similar, considerando esta vez el sólido como un cuerpo rígido.

En las Figuras 28–30 se muestra la penetración y evolución de un cubo y un cilindro en un recipiente con agua. La graduación de colores en la figura indica los diferentes tamaños de los elementos de la malla en varios instantes. Obsérvese que el algoritmo de generación de malla asegura un tamaño de elementos más pequeños en la proximidad de los cuerpos durante su evolución en el agua.

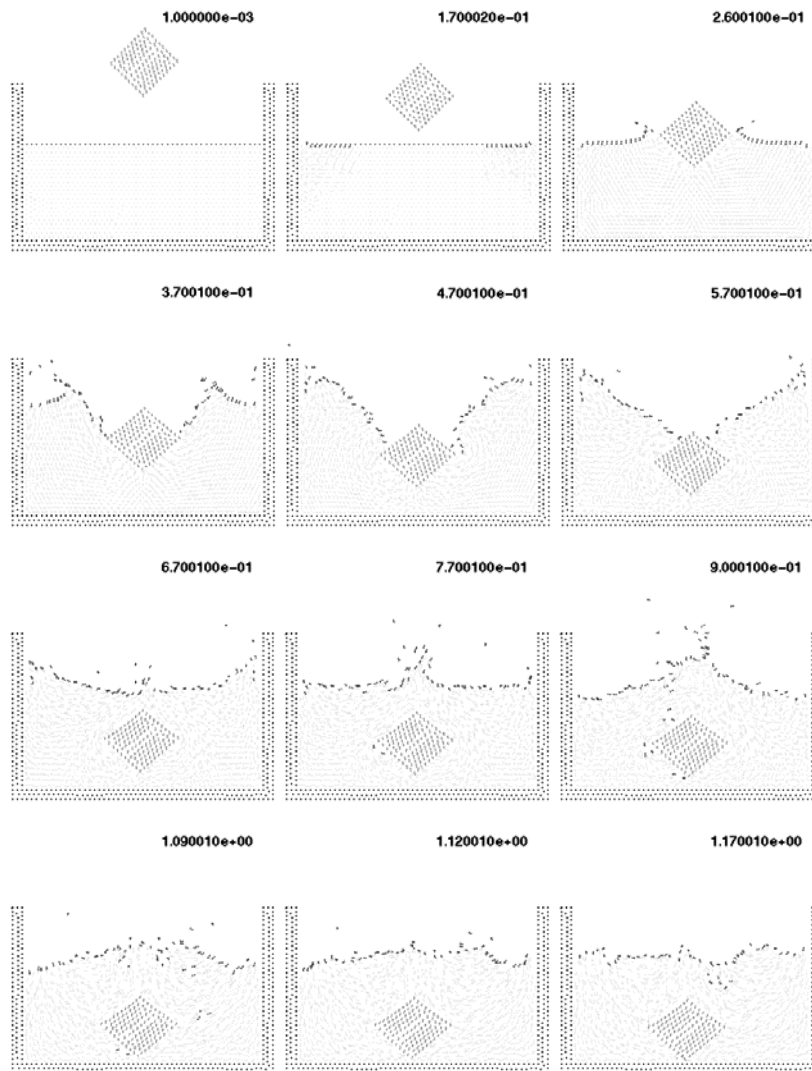


Figura 26. Análisis de la penetración en el agua de un cubo rígido. El cubo se modela como un fluido de alta viscosidad.

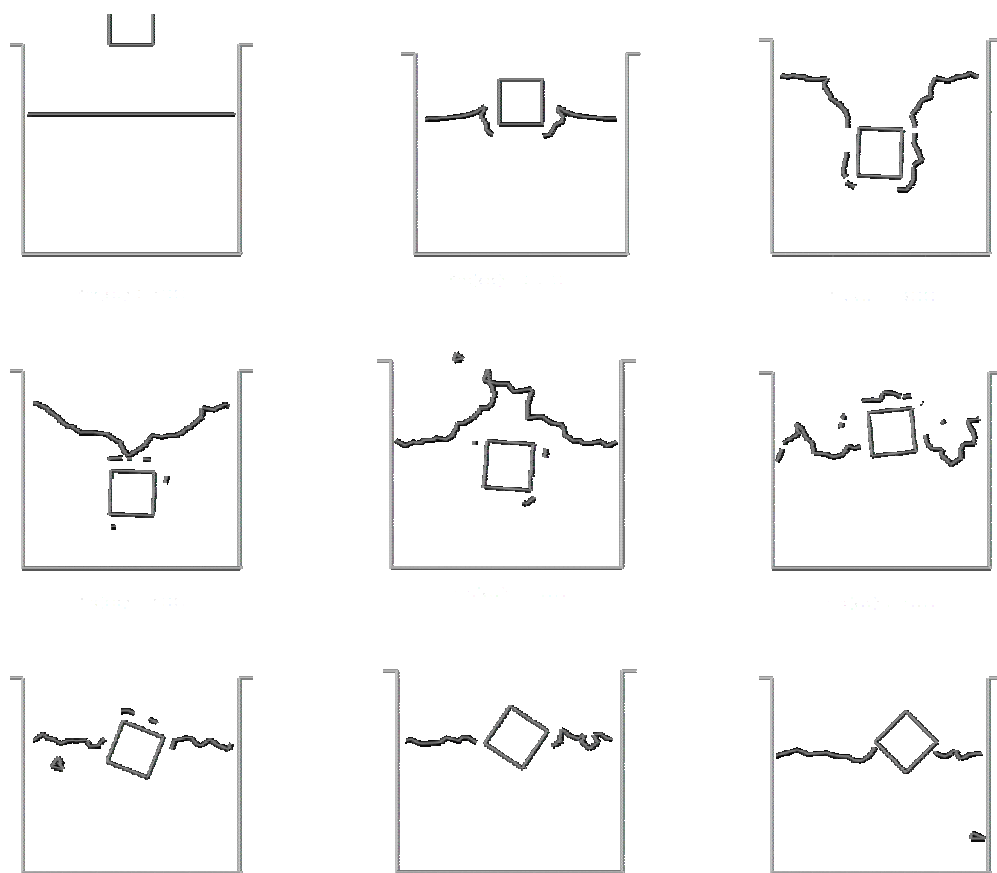


Figura 27. Análisis de un cubo rígido cayendo en el interior de un recipiente con agua. El cubo se modela como un sólido rígido.

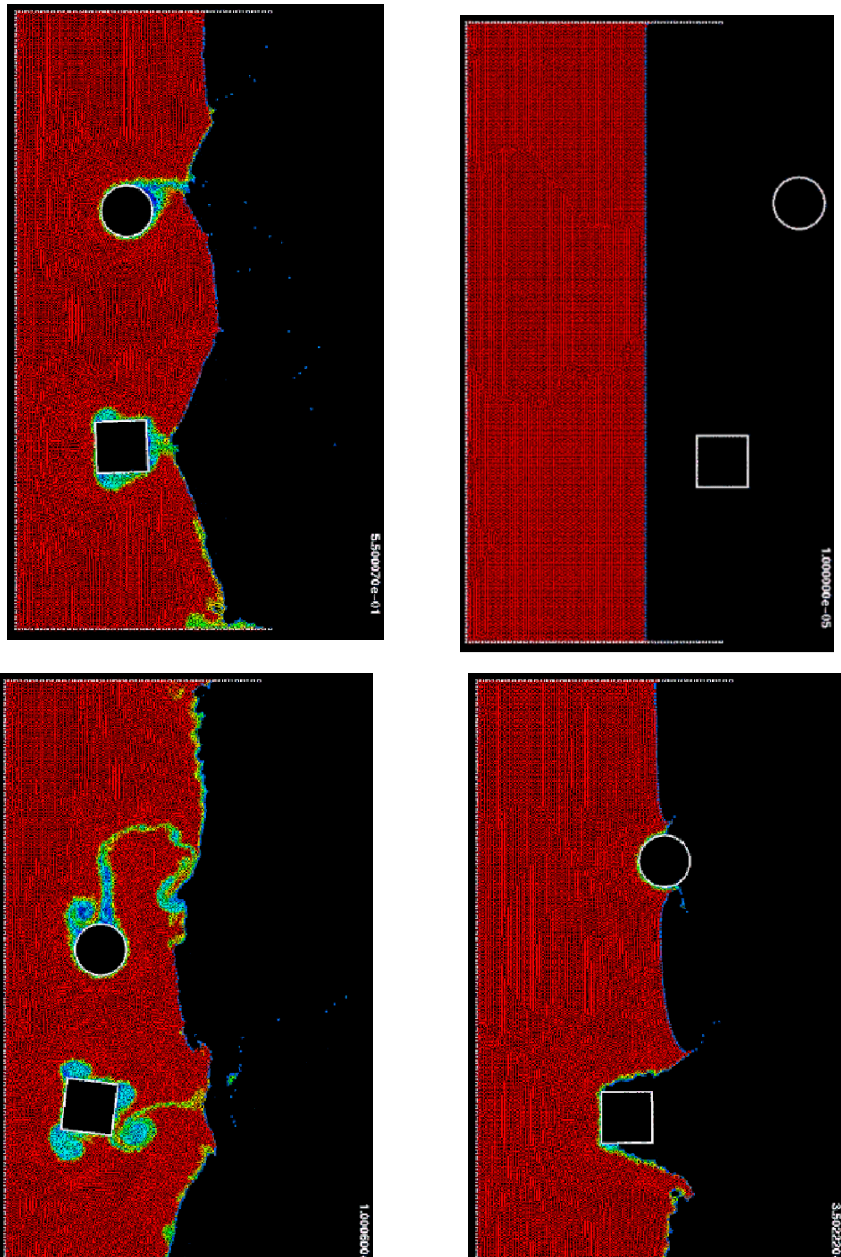


Figura 28. Simulación 2D de la penetración en el agua de un cubo y un cilindro. Los colores indican la distribución de tamaño de elementos.

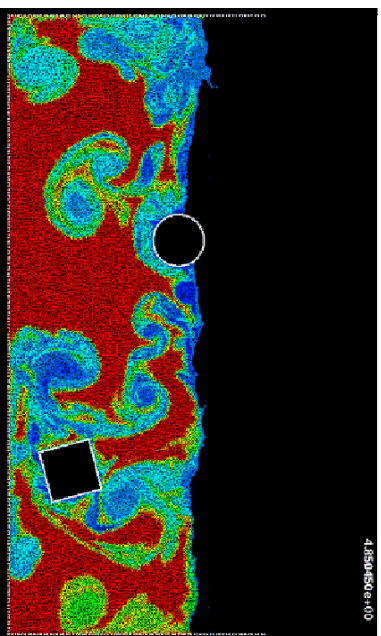
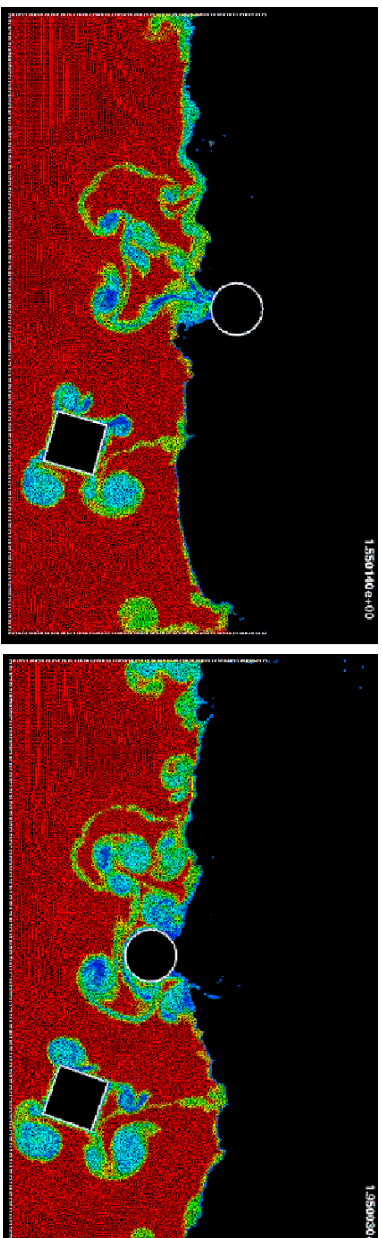


Figura 29. Simulación 2D de la penetración en el agua de un cubo y un cilindro. Los colores indican la distribución de tamaño de elementos sobre la superficie.

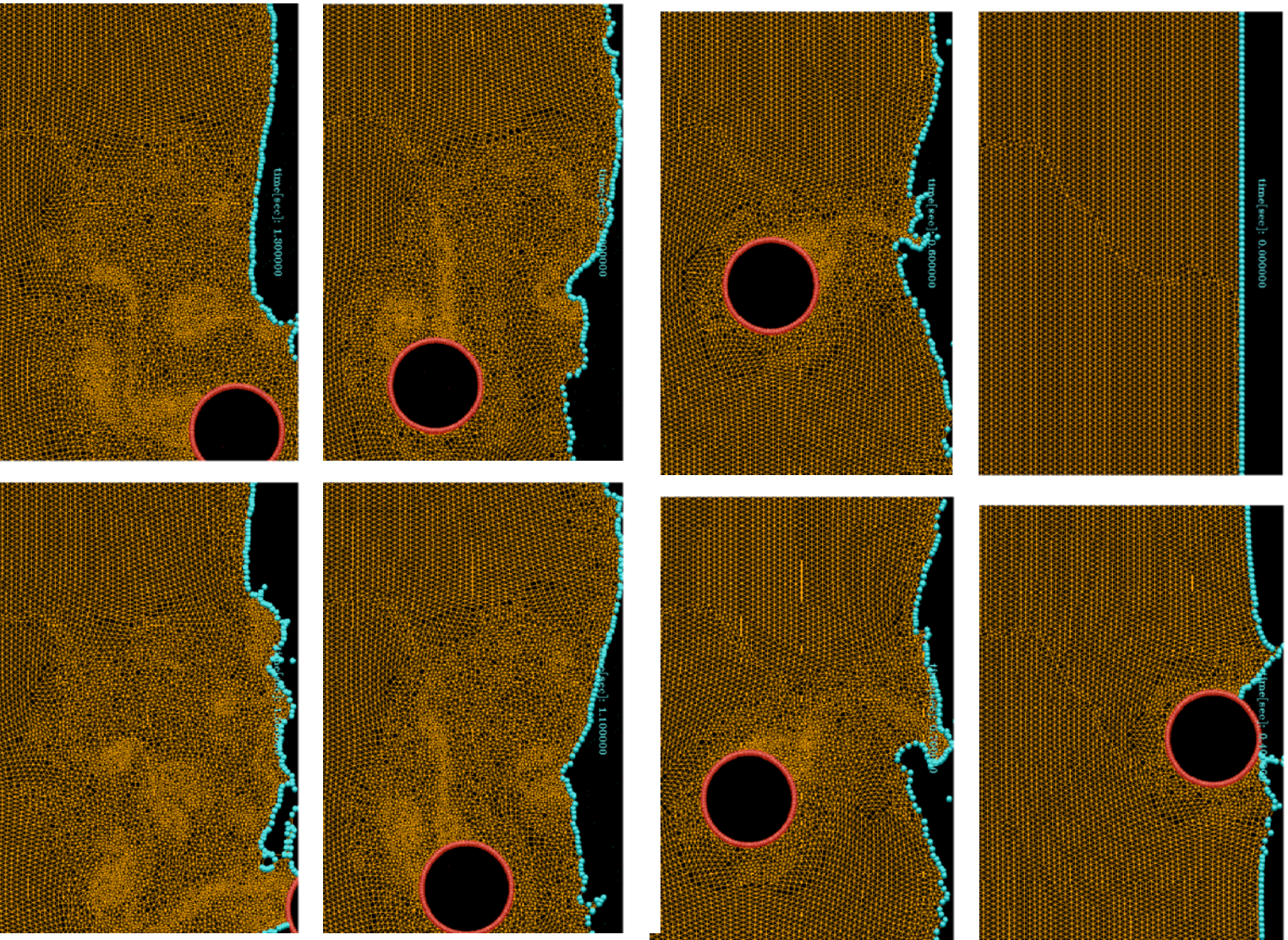


Figura 30. Detalle del tamaño de los elementos durante la evolución del movimiento de un cilindro rígido dentro de un recipiente con agua.

10.5 Análisis del flujo de agua sobre estructuras rígidas

Los ejemplos que se presentan en este apartado incluyen diferentes casos de interacción de una columna de agua con objetos rígidos.

En la Figura 31 se muestra la simulación de la propagación de una ola generada en un canal incidiendo sobre un dique vertical.

En la Figura 32 se compara la presión calculada sobre la pared vertical del dique con resultados experimentales obtenidos en el Canal de Ensayos de Puertos de la E.T.S de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Barcelona.

El ejemplo de la Figura 33 muestra la evolución de la rotura de una columna de agua dentro de un recipiente prismático.

En las Figuras 34 y 35 se muestran dos ejemplos similares que incluyen la interacción del agua con un cilindro vertical contenido en el centro del recipiente.

Finalmente en las Figuras 36 y 37 se muestra el impacto de una ola sobre una columna prismática sobre una placa de cimentación sustentada por pilotes. En las Figuras 38 y 39 se muestra también la presión del agua sobre dicha estructura.

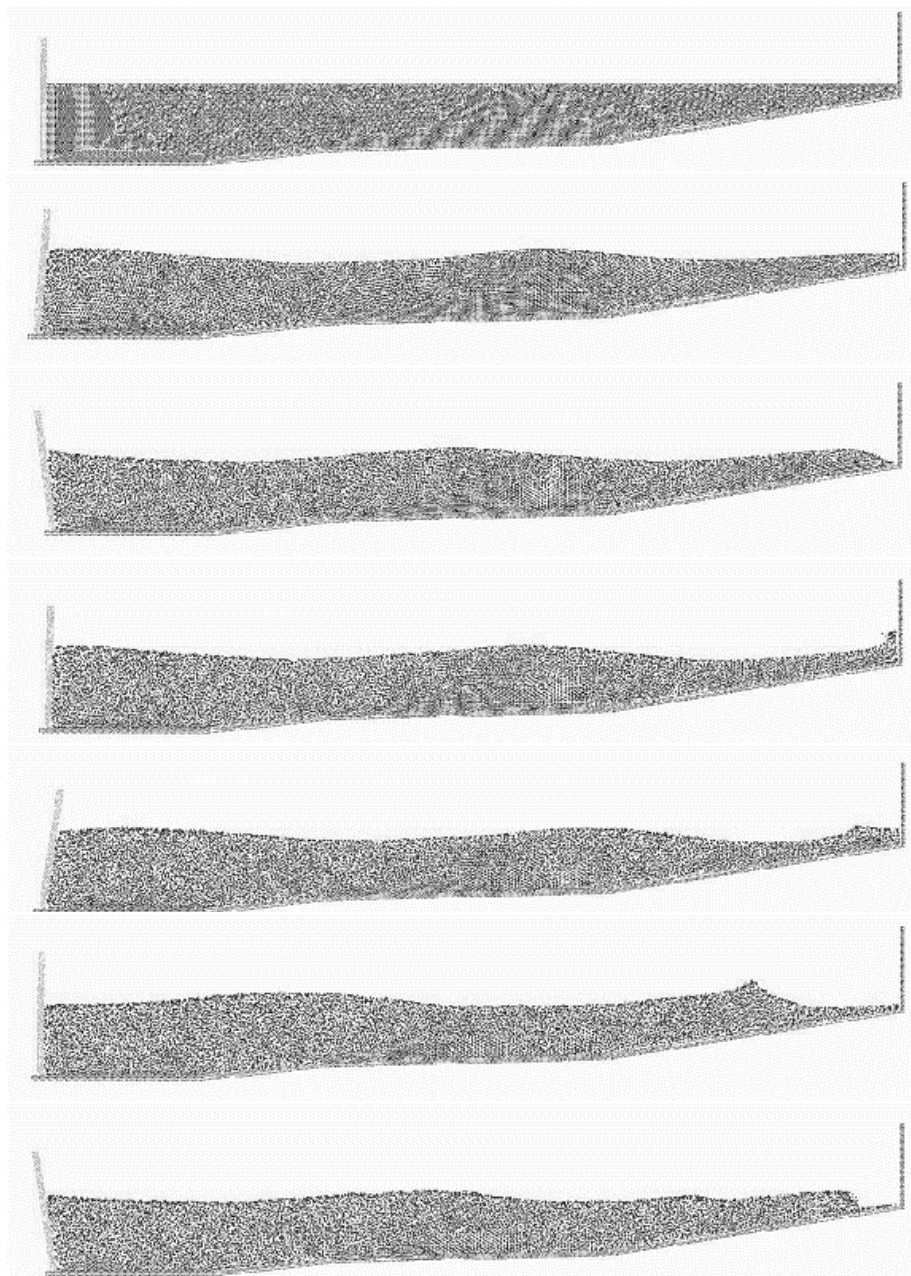


Figura 31. Simulación de la propagación de una ola generada en un canal incidiendo sobre un dique vertical.

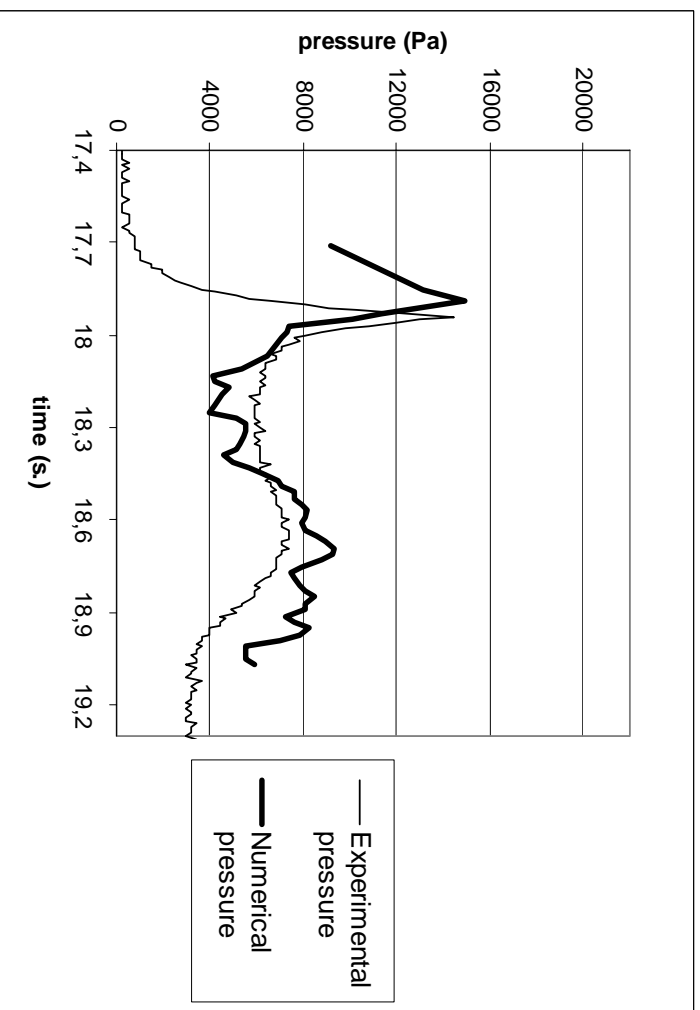


Figura 32. Comparación de la presión de una ola incidiendo sobre una pared vertical calculada con el PFEM y medida experimentalmente.

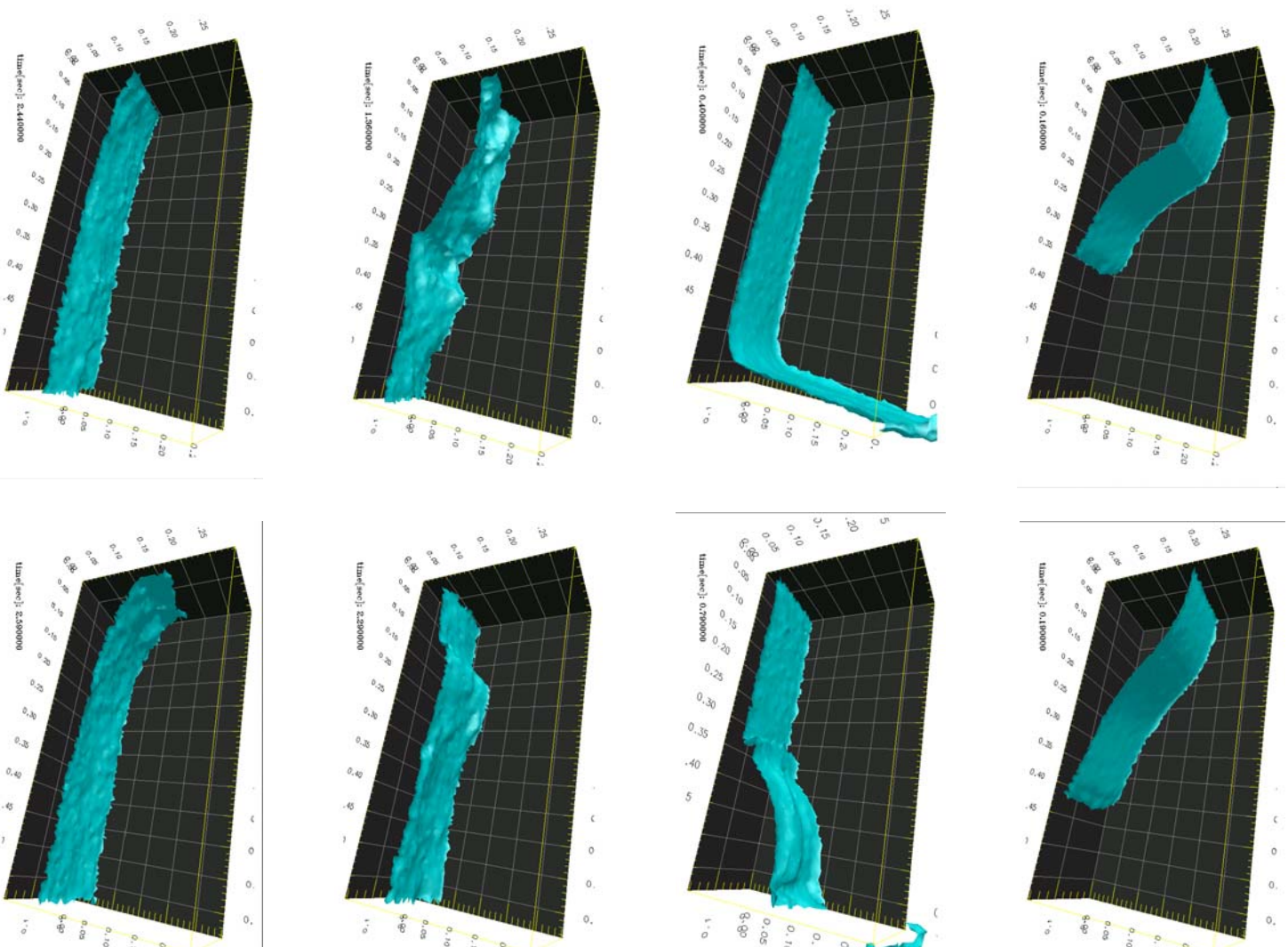


Figura 33. Simulación 3D de la evolución de la rotura de una columna de agua dentro de un recipiente prismático .

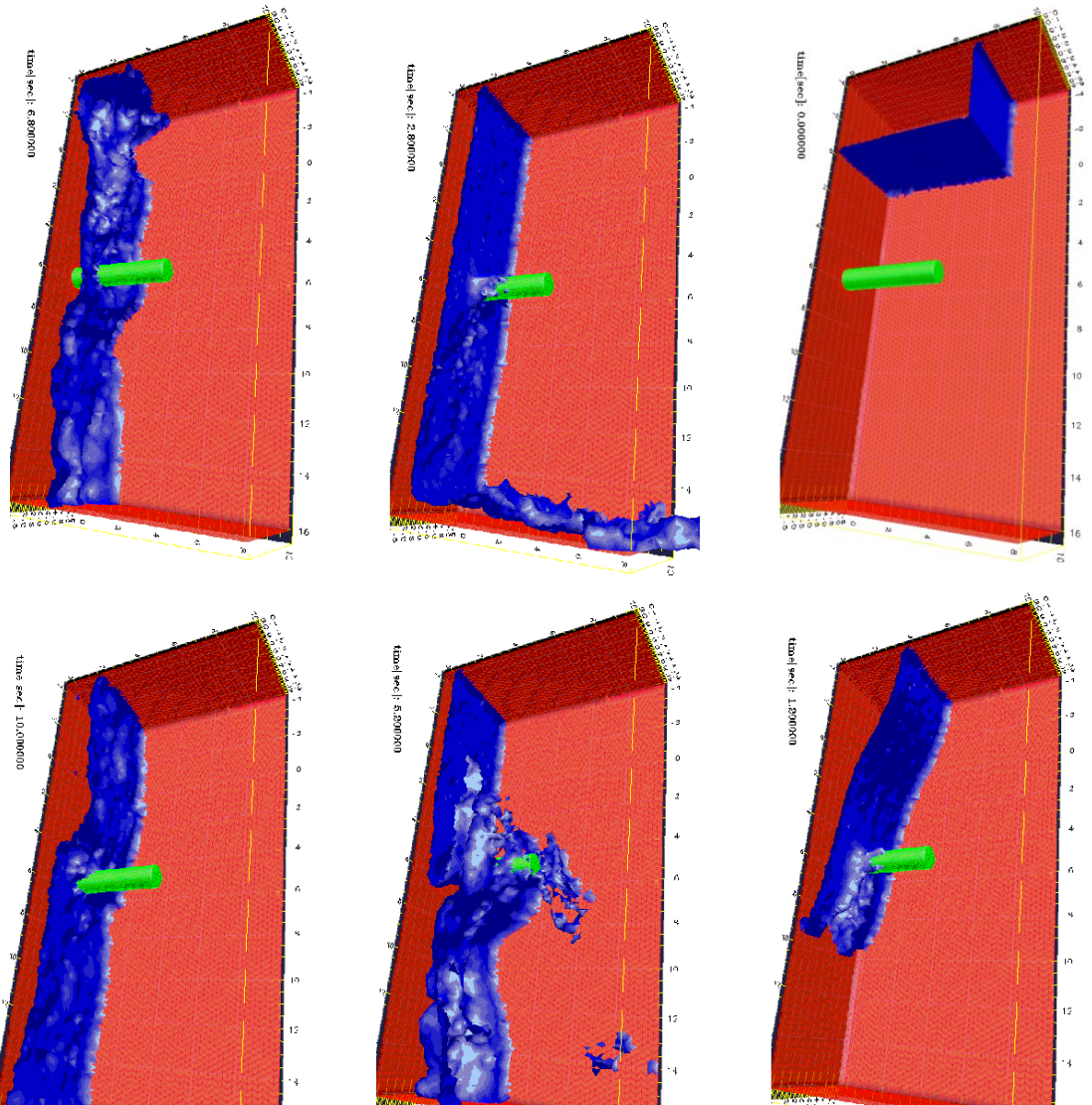


Figura 34. Evolución de la rotura de una columna de agua en el interior de un recipiente prismático que contiene un cilindro vertical en el centro.

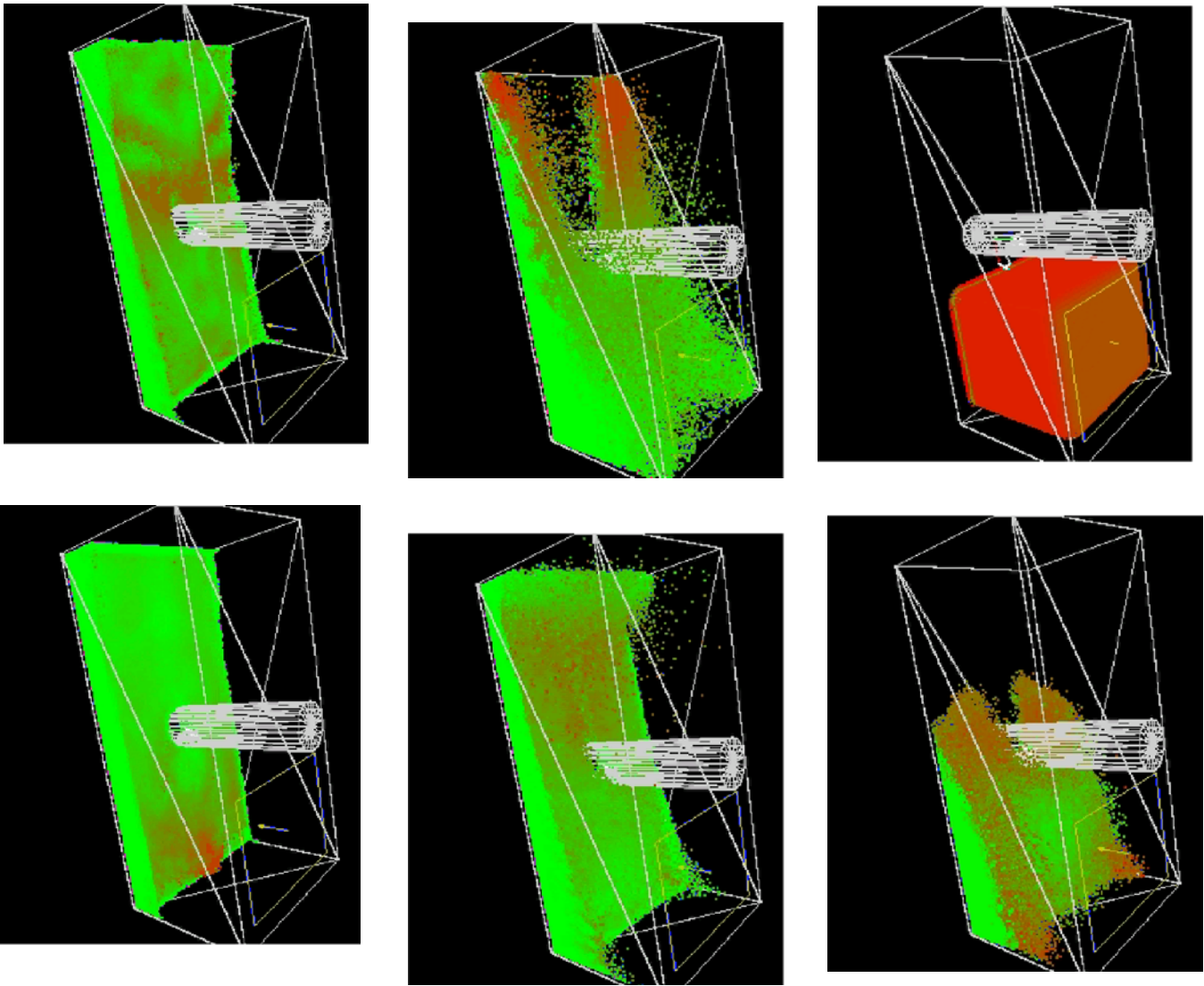


Figura 35. Rotura de una columna de agua en un recipiente conteniendo una columna cilíndrica.

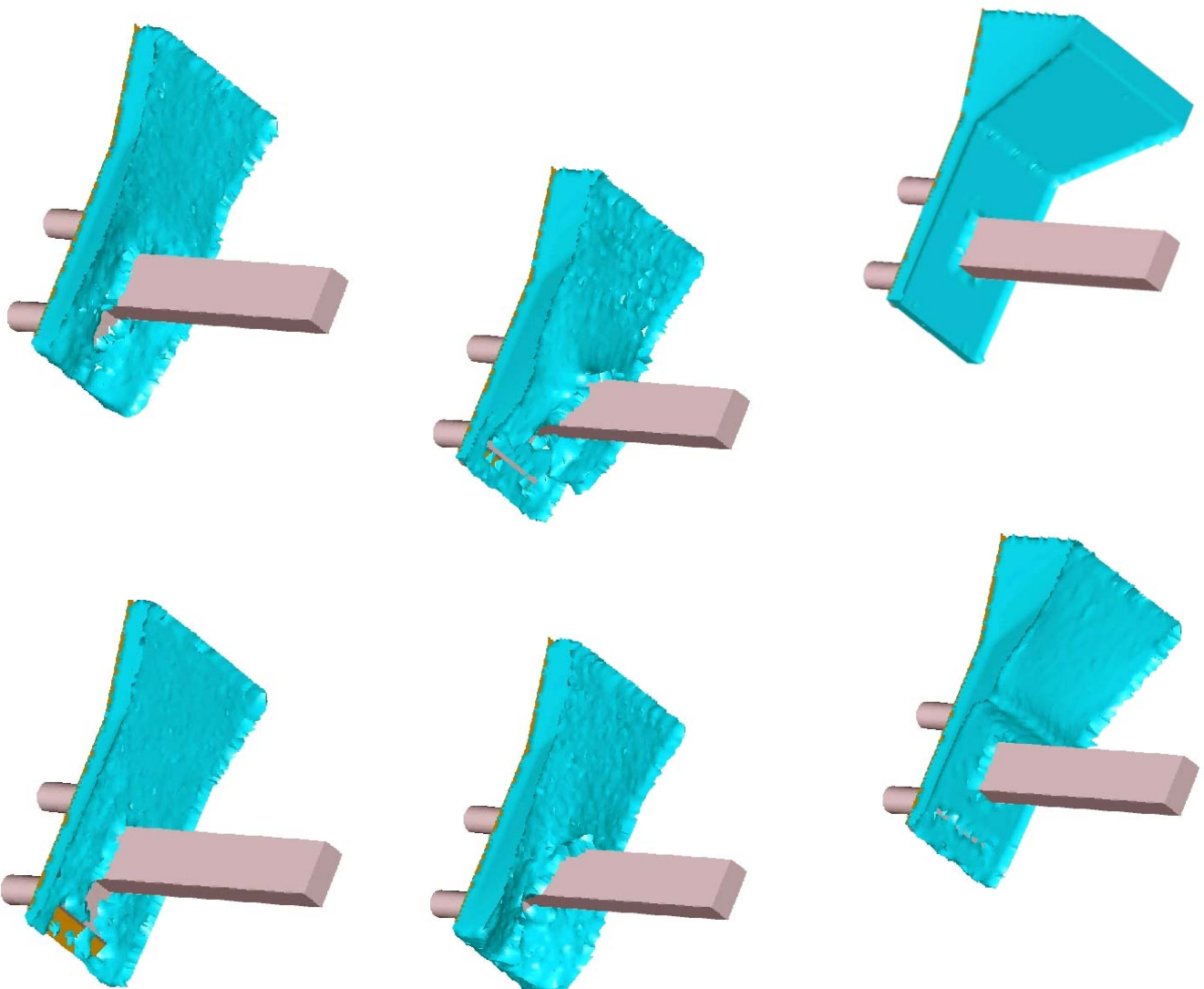


Figura 36. Simulación del impacto de una ola sobre una columna prismática sobre una placa de cimentación sustentada por pilotes.

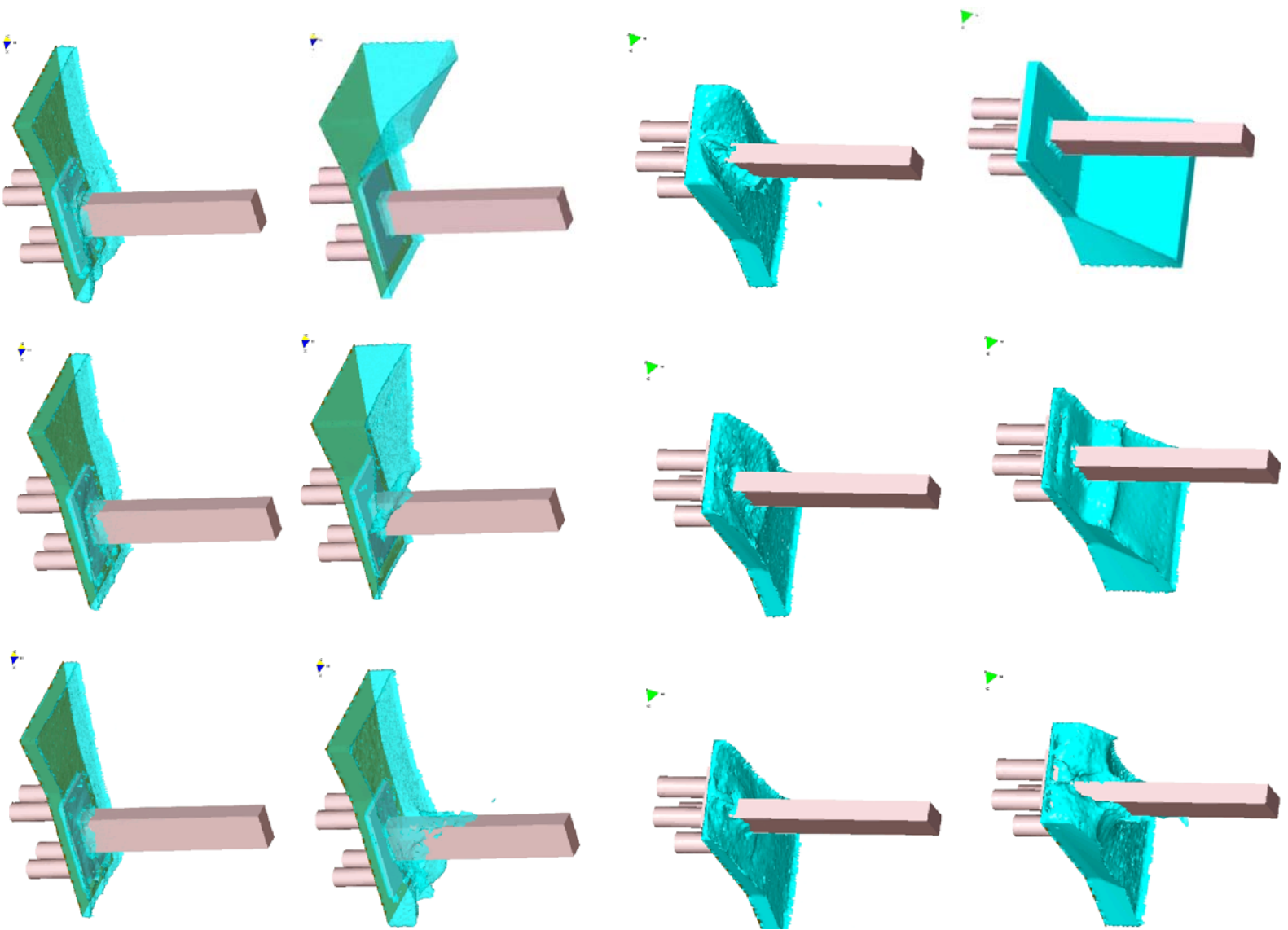


Figura 37. Diferentes vistas de la simulación del impacto de una ola sobre una columna prismática sobre una placa de cimentación sustentada por pilotes.

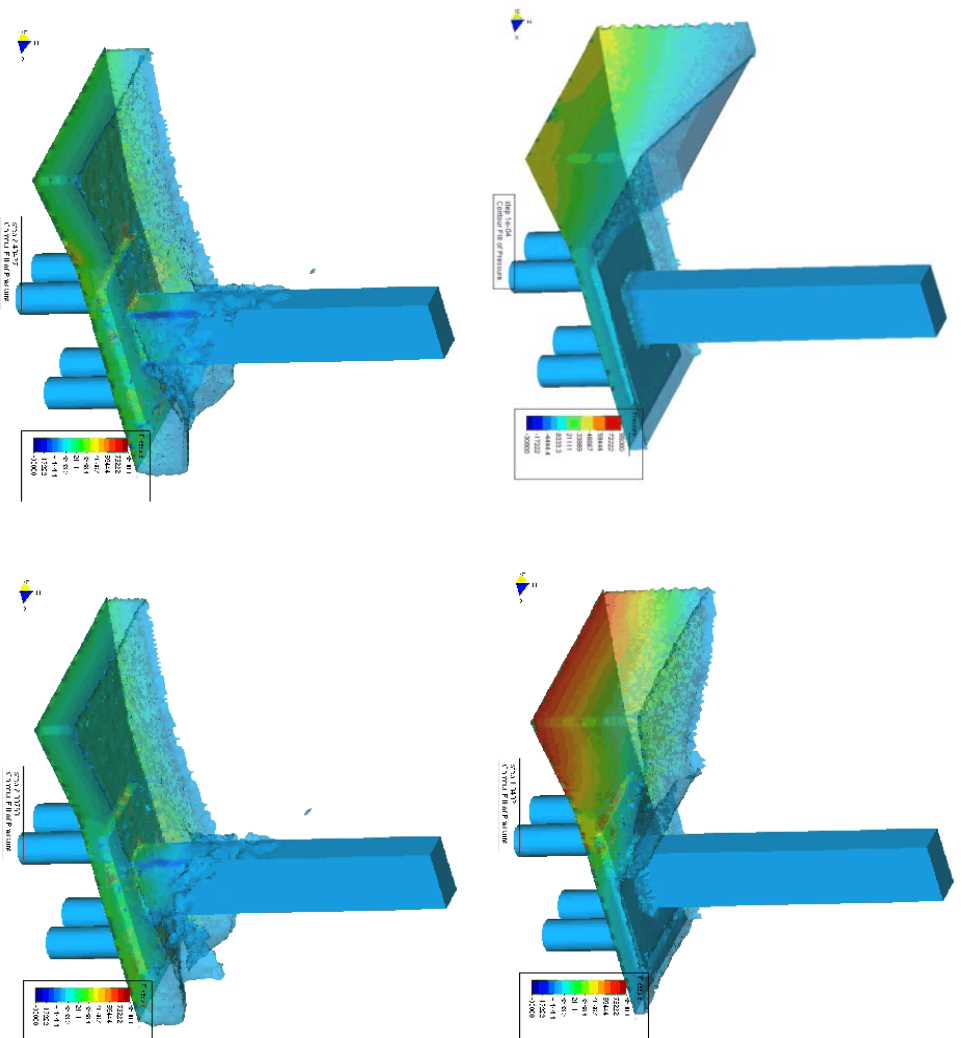


Figura 38. Simulación del impacto de una ola sobre una columna prismática sobre una placa de cimentación sustentada por pilotes. Los colores indican las presiones sobre la estructura.

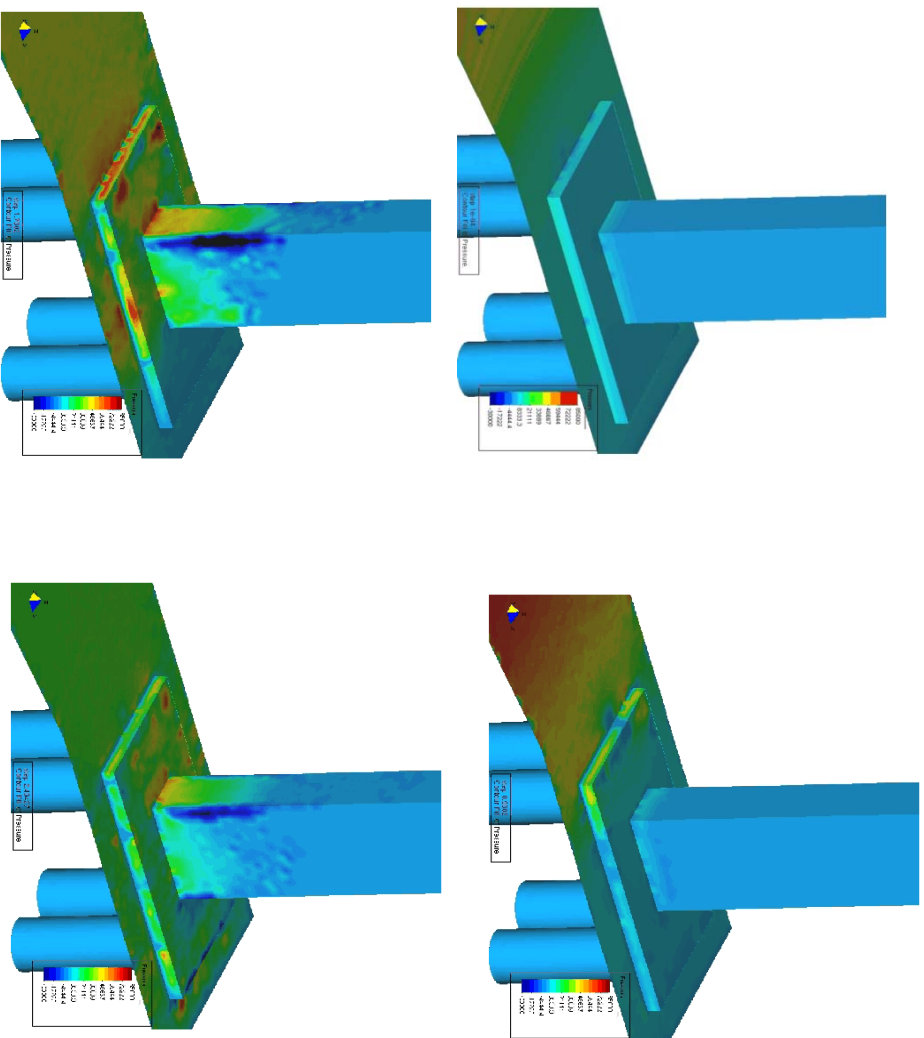


Figura 39. Detalle del análisis del impacto de una ola sobre una columna prismática sobre una placa de cimentación sustentada por pilotes. Los colores indican las presiones sobre la estructura.

10.6 Arrastre de objetos por olas

El PFEM es un método muy idóneo para el análisis del impacto de grandes olas sobre objetos tales como vehículos, personas, etc.



Figura 40. Ejemplo de gran ola evolucionando hacia un coche.

El ejemplo que aquí se muestra simula el efecto de una gran ola impactando sobre un cubo que representa un vehículo. En la Figura 41 se muestran los resultados del estudio realizado donde se aprecia la eficiencia del método PFEM para modelar el arrastre del cubo debido al impacto de la columna de agua.

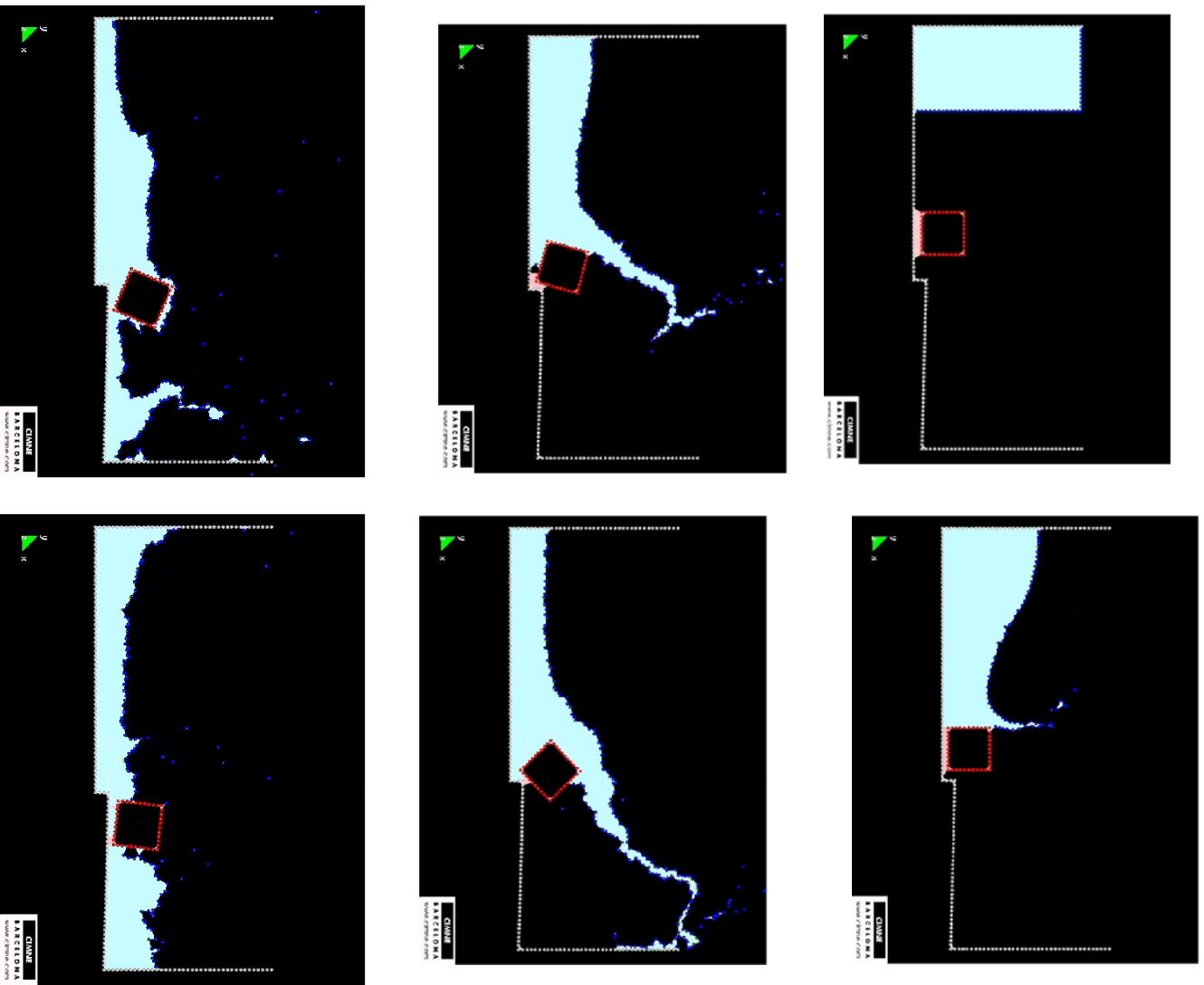


Figura 41. Efecto de una columna de agua impactando sobre un sólido con forma cúbica.

10.7 Análisis del flujo de agua sobre diques

Los ejemplos de este apartado muestran la aplicabilidad del PFEM para estudiar el efecto del agua sobre diques.

En las Figuras 43–45 se muestra la simulación del flujo de una ola en un canal de ensayos y detalles del impacto de la ola sobre un conjunto de rocas que representan la escollera de un dique.

En las Figuras 46–51 se muestra un análisis 3D de un problema similar. Se presenta la evolución en 3D de una ola y el impacto de la misma sobre las rocas de una escollera. Se destaca que es posible obtener las presiones sobre cada roca de la escollera en cada instante del proceso de cálculo.

En la Figura 52 se presentan algunos resultados del análisis de la propagación del oleaje en un dique formado por cilindros vertical de hormigón armado. La disposición de los cilindros permite absorber y disipar la energía del oleaje



Figura 42. Olas rompiendo sobre una escollera.

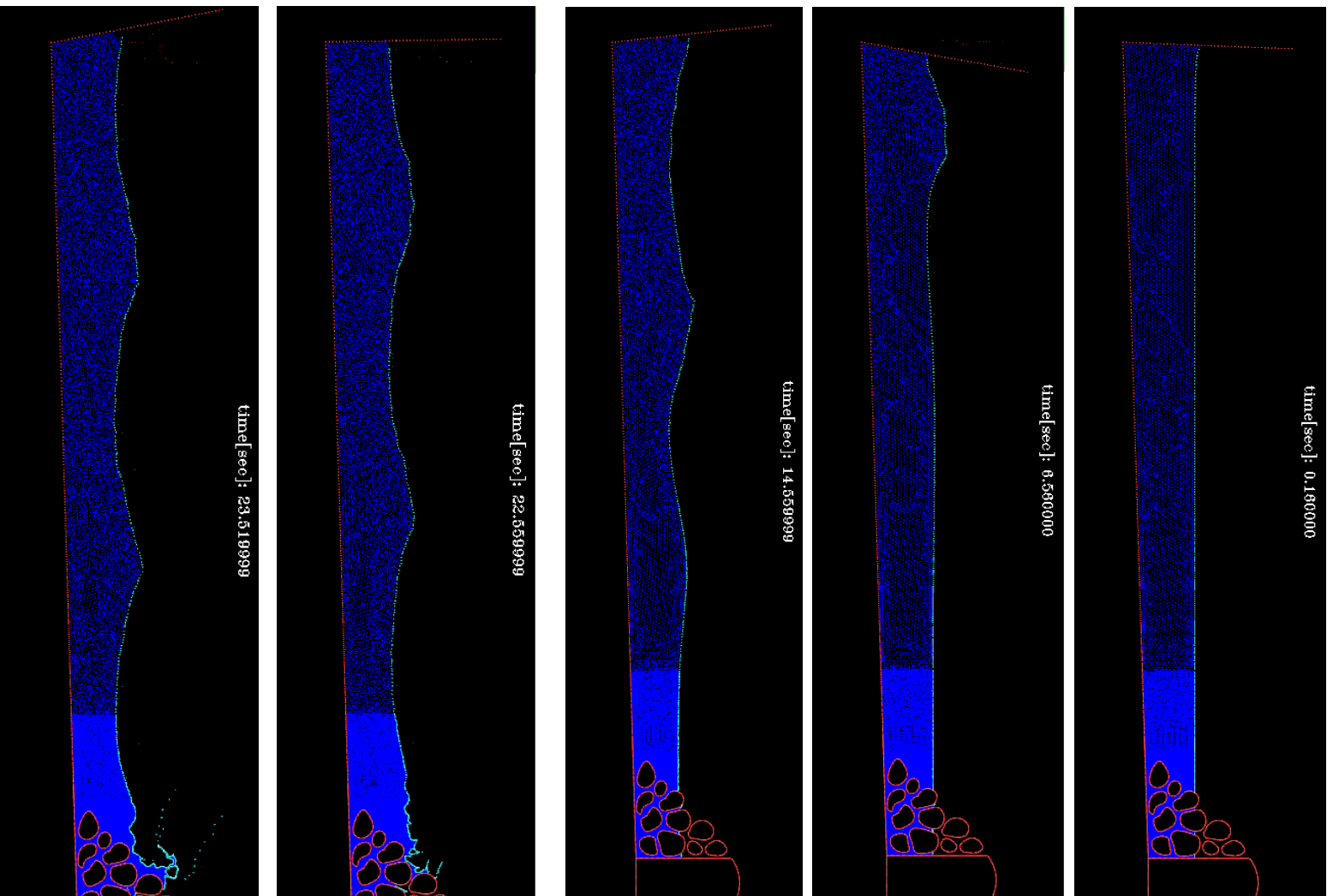


Figura 43. Simulación 2D de un canal para ensayo del impacto de olas sobre una escollera.

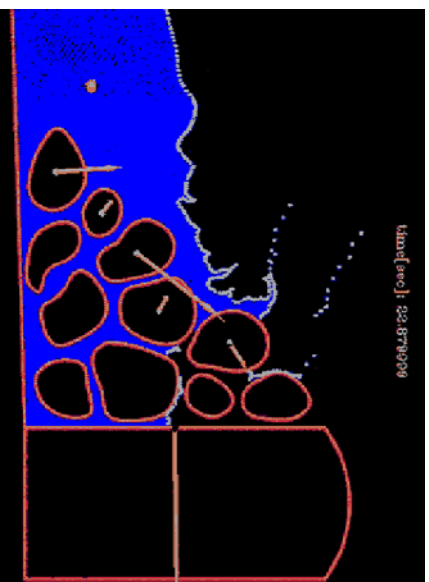
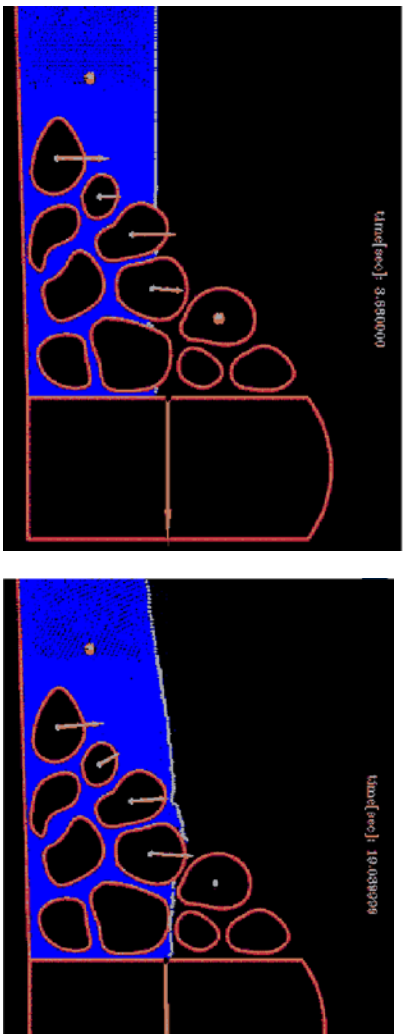


Figura 44. Detalle del impacto sobre una escollera de una ola generada en un canal de ensayos.

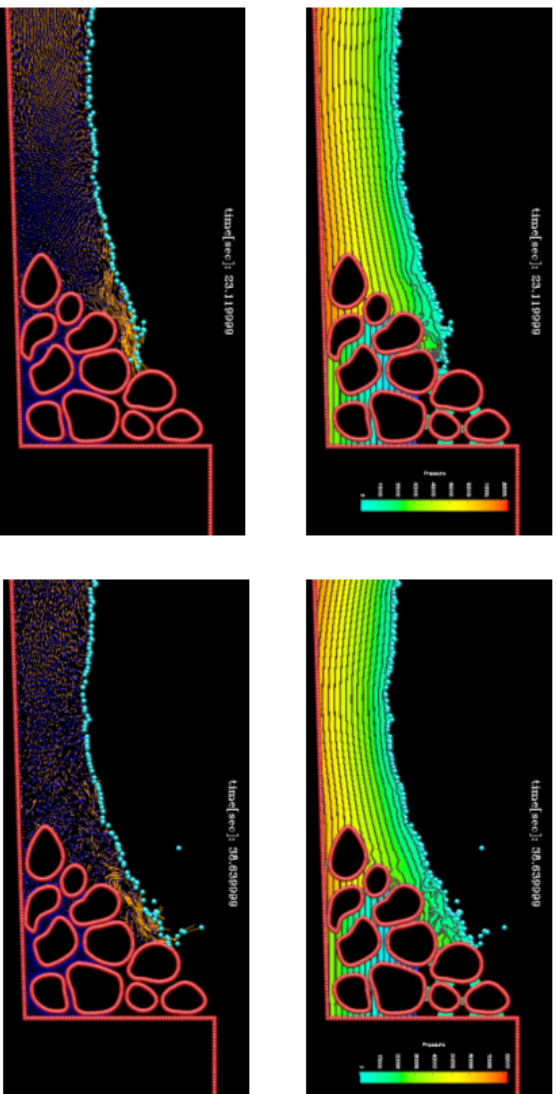


Figura 45. Detalle de las presiones y la velocidad del agua en el impacto de una ola sobre una escollera.

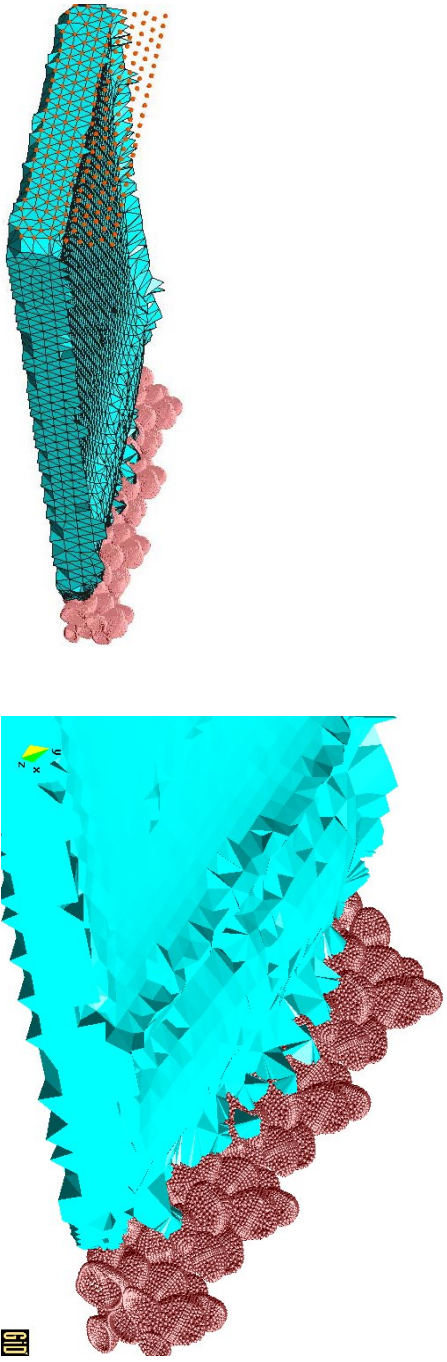


Figura 46. Simulación 3D de un canal para ensayos de impacto de olas sobre diques de escollera.

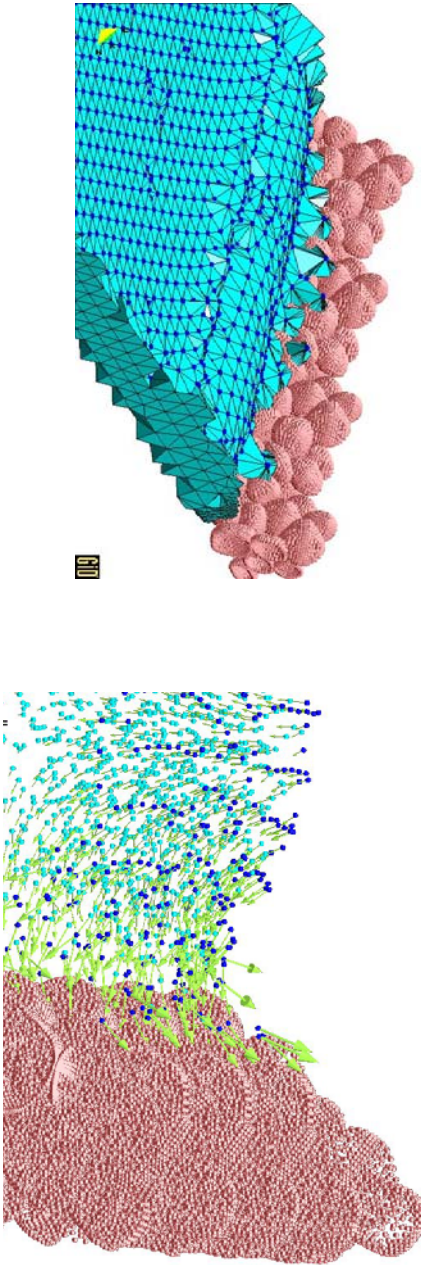


Figura 47. Detalle de la modelización de la ola incidente sobre la escollera y del campo de velocidades del agua en un instante.

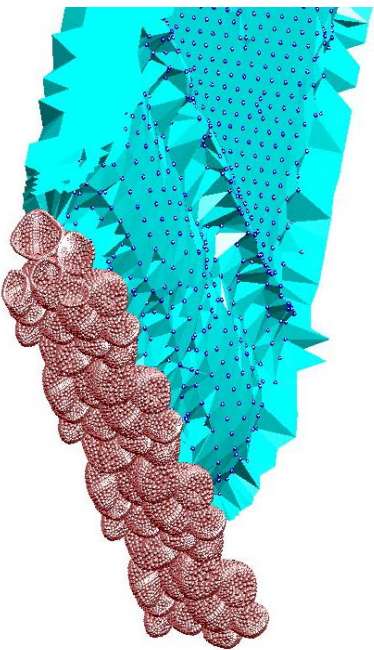
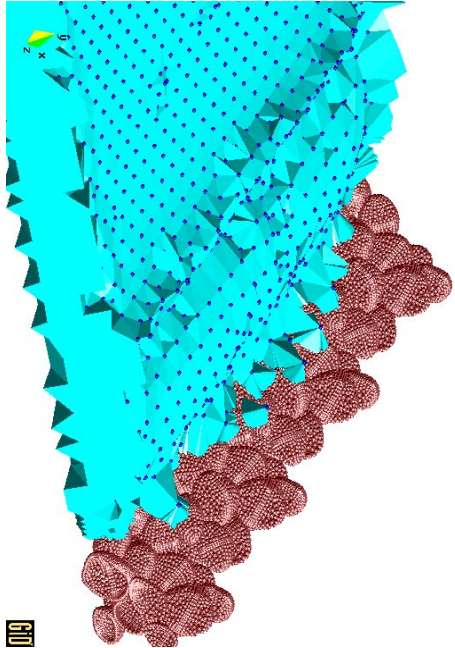
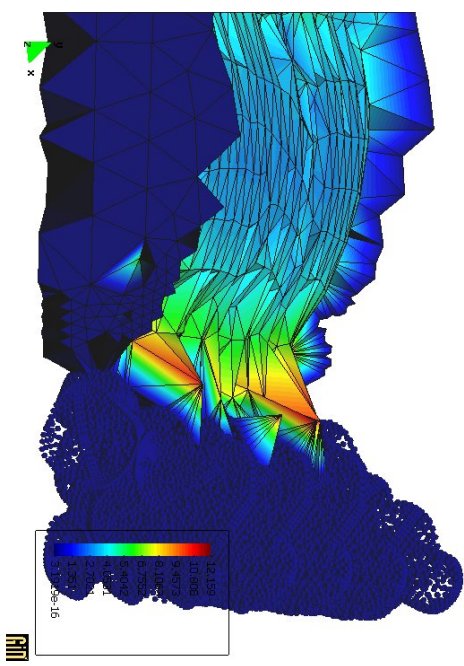
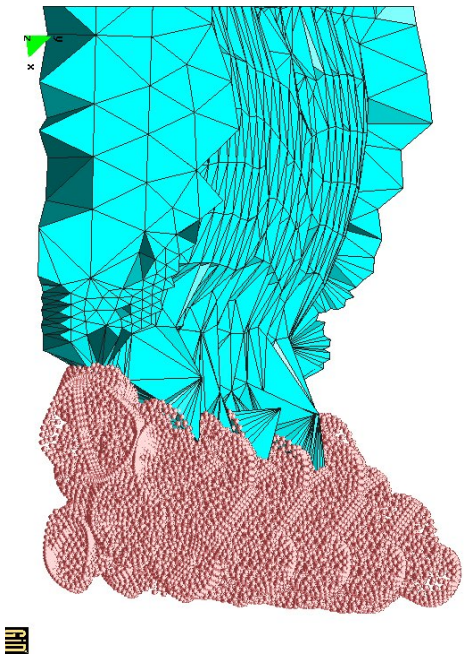


Figura 48. Detalles de la modelización 3D de una ola incidente sobre una escollera en diferentes instantes.

Figura 49. Vista general de la simulación 3D de la evolución de una ola sobre una escollera.

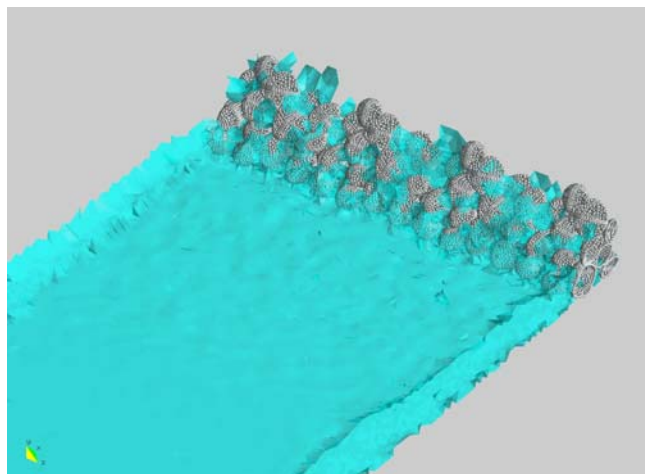
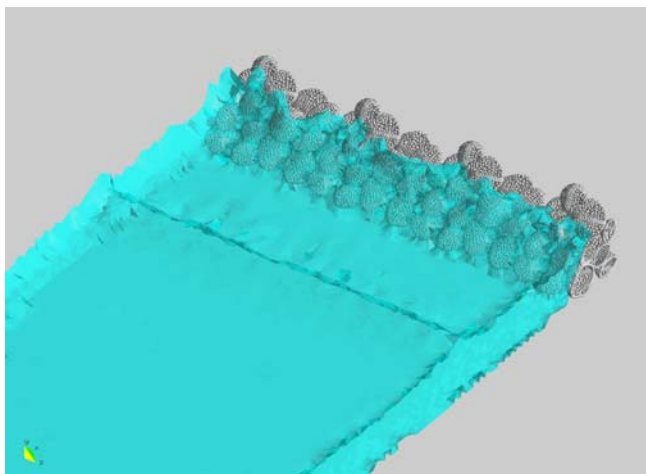
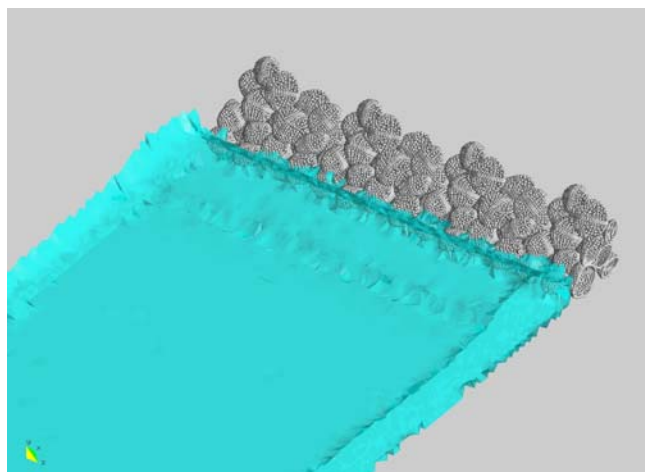
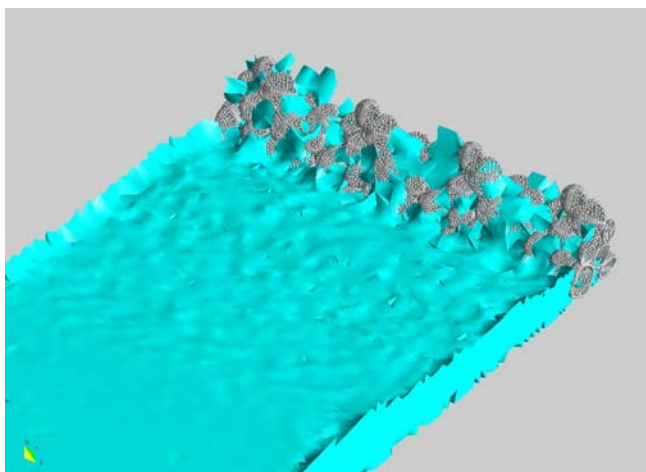
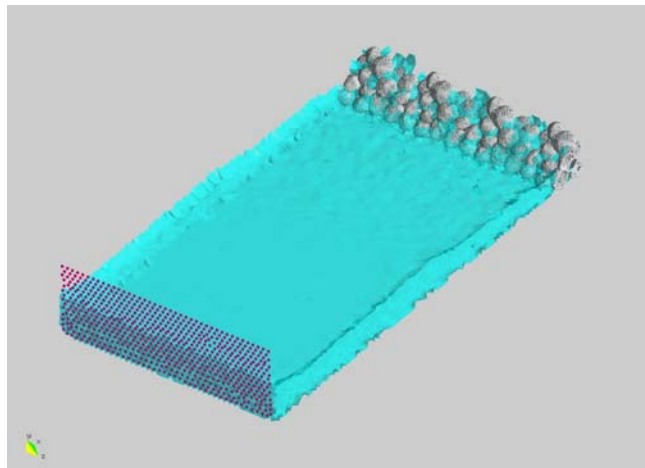
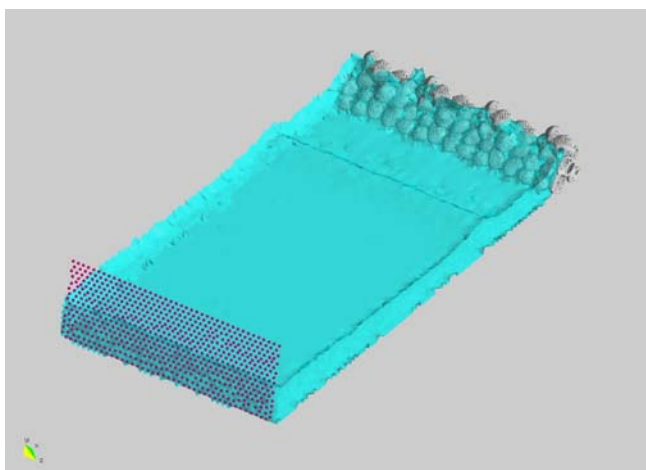


Figura 50. Vista general de la simulación 3D de la evolución de una ola sobre una escollera..

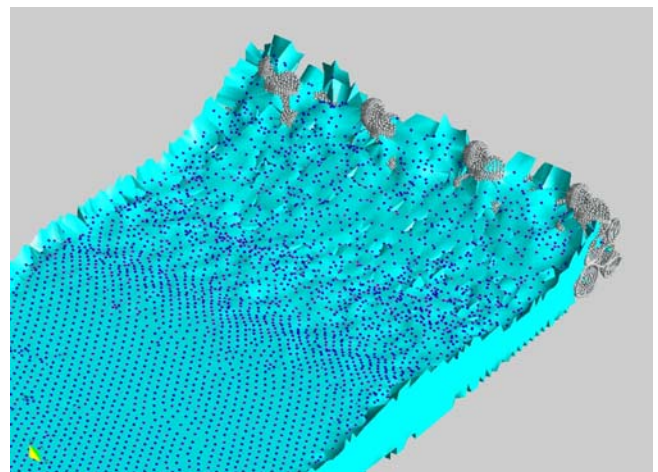
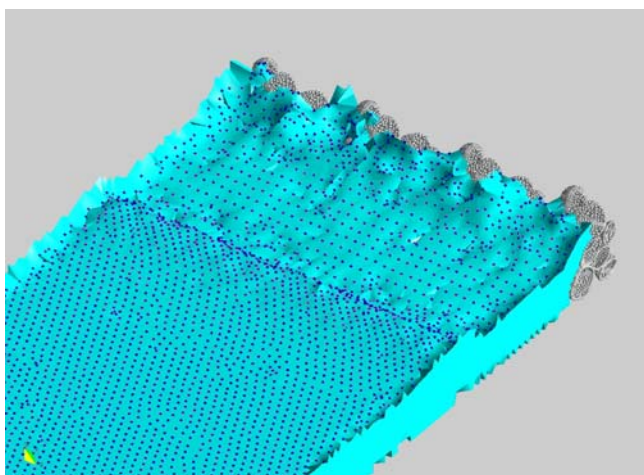
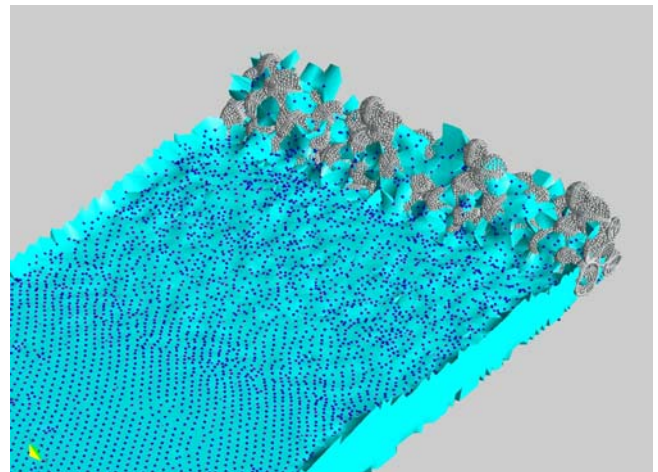
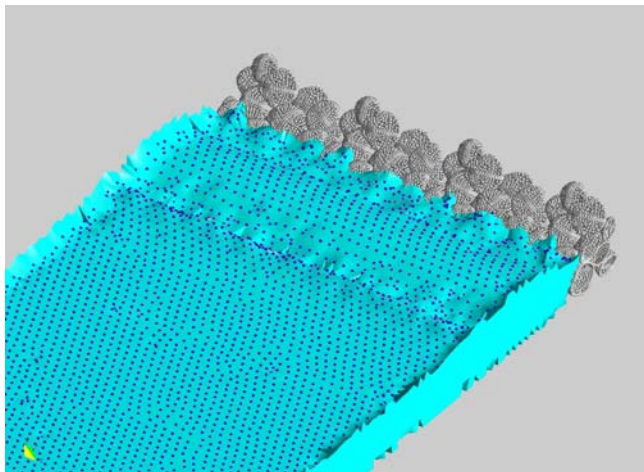
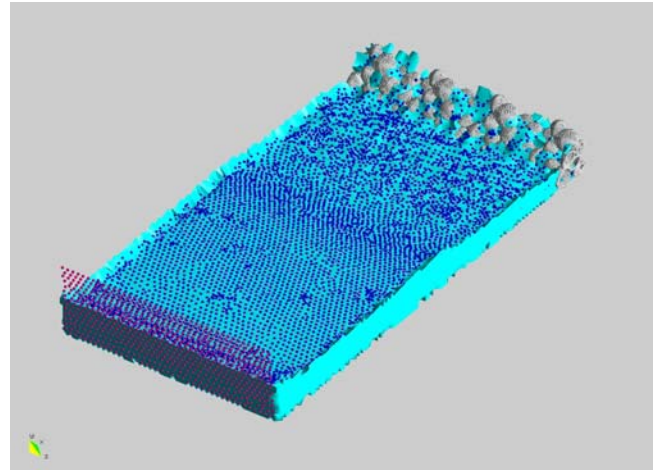
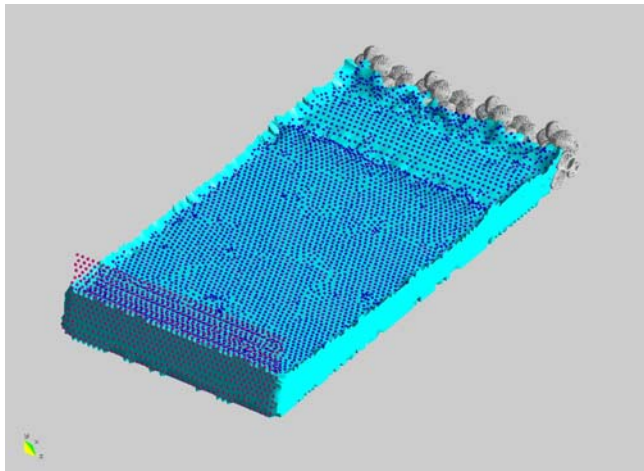


Figura 51. Vista de la evolución de la superficie libre durante el impacto de una ola sobre una escollera.

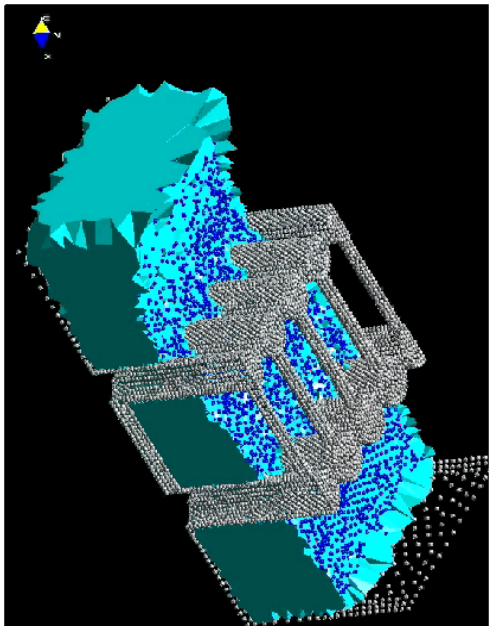
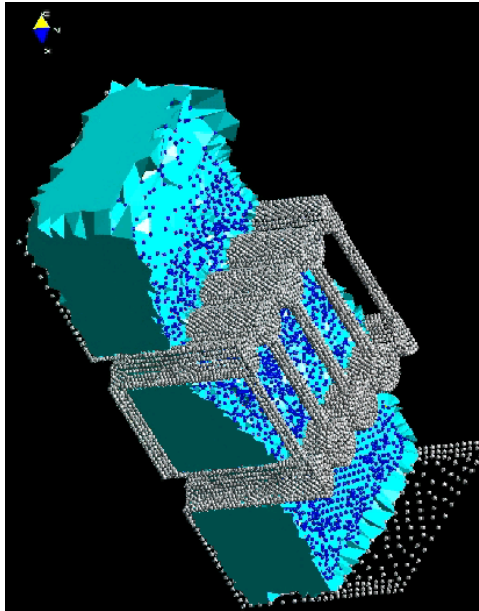
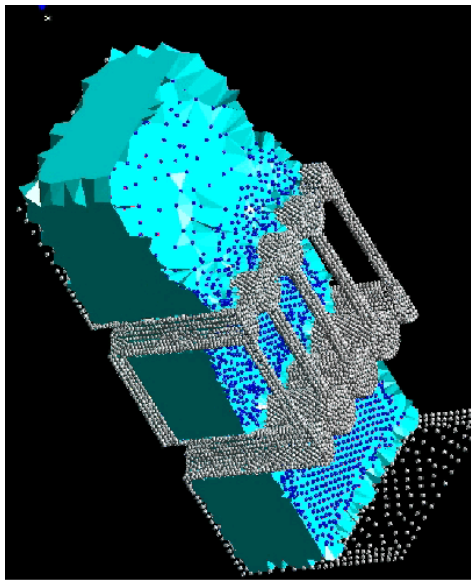
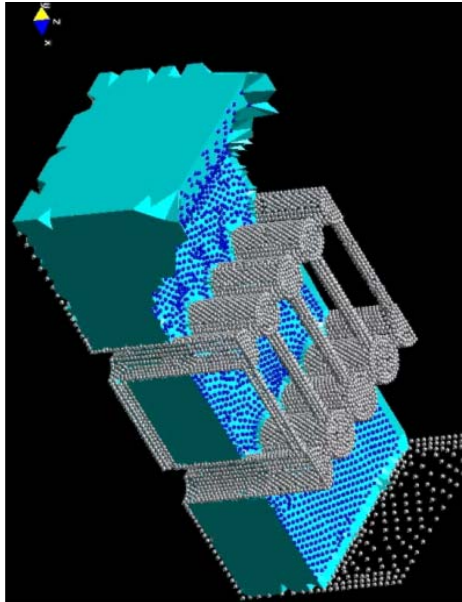


Figura 52. Análisis de la interacción del oleaje con un dique formado por cilindros de hormigón.

10.8 Movimiento de tetrápodos bajo la acción de olas

Los últimos ejemplos que se presentan están relacionados con la cinemática de tetrápodos y su comportamiento bajo la acción de olas.

La Figura 53 muestra una simulación del movimiento de cinco tetrápodos que caen sobre un recipiente inclinado.

Las Figuras 54 muestran el proceso de caída y hundimiento de dos tetrápodos en un recipiente con agua.

Finalmente en las Figuras 55-58 se muestran diversas vistas del proceso de caída de diez tetrápodos sobre un plano inclinado y su interacción y con una ola incidente.

Estos ejemplos muestran las posibilidades del método PFEM para analizar problemas complejos de interacción de olas con estructuras de interés para la ingeniería de puertos y costas.

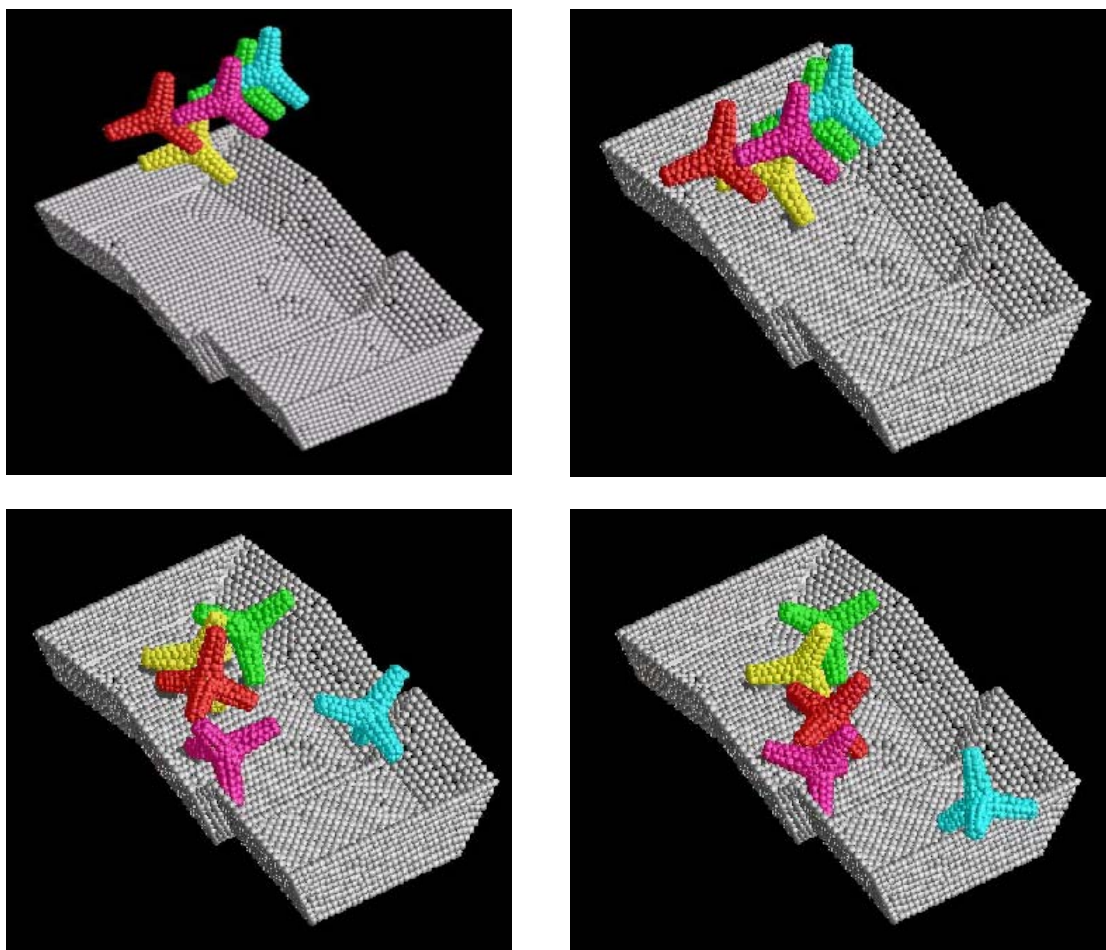


Figura 53. Simulación de la cinemática de un conjunto de cinco tetrápodos.

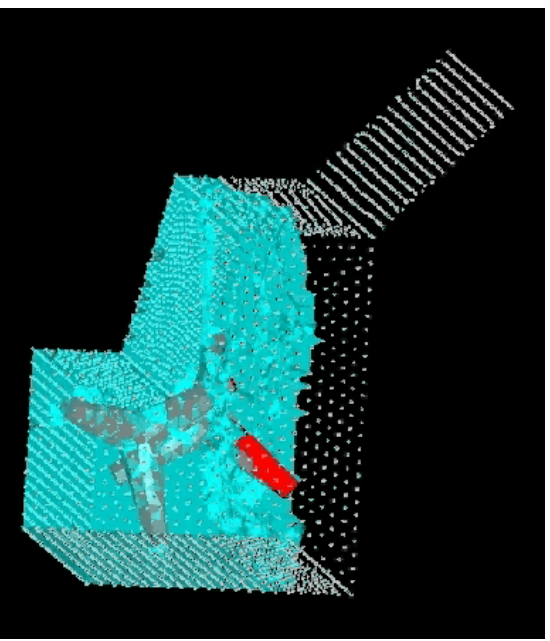
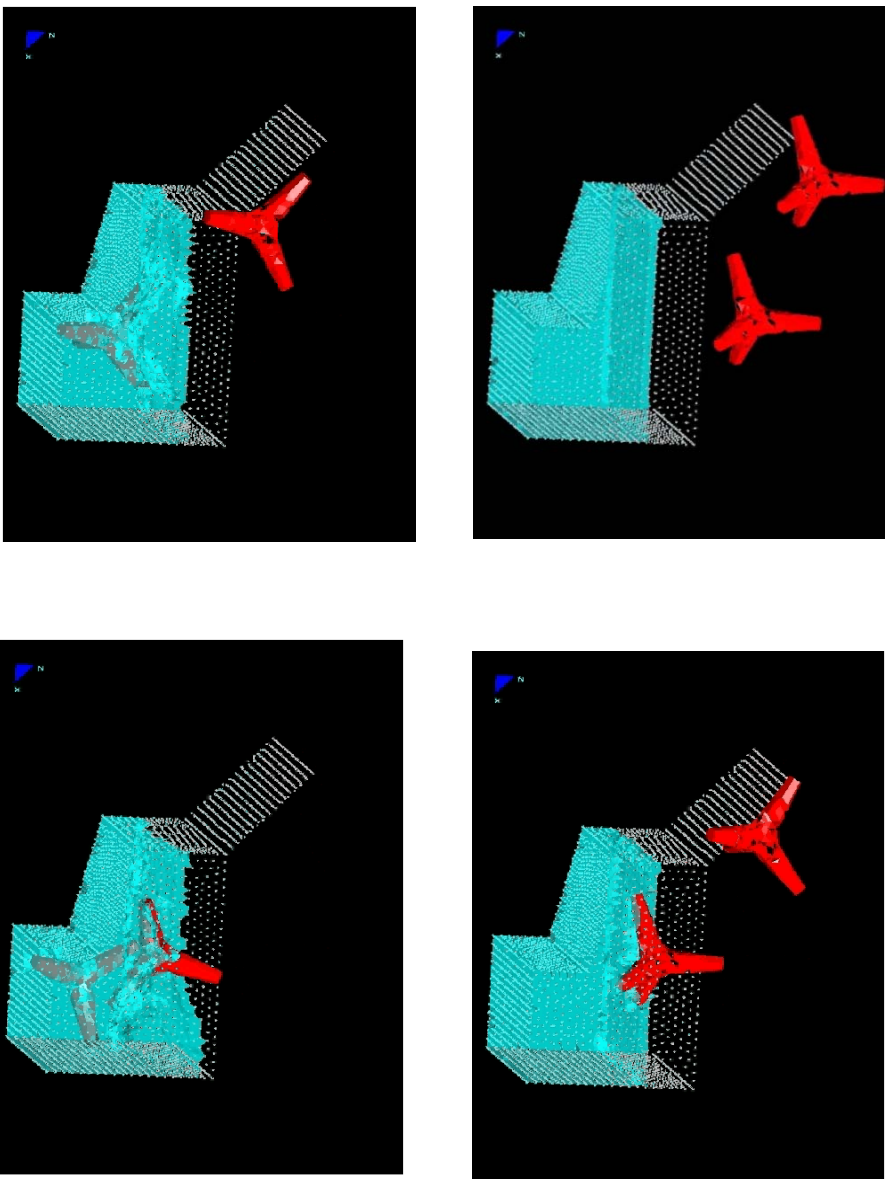


Figura 54. Simulación de la caída de dos tetrapodos en un recipiente con agua.

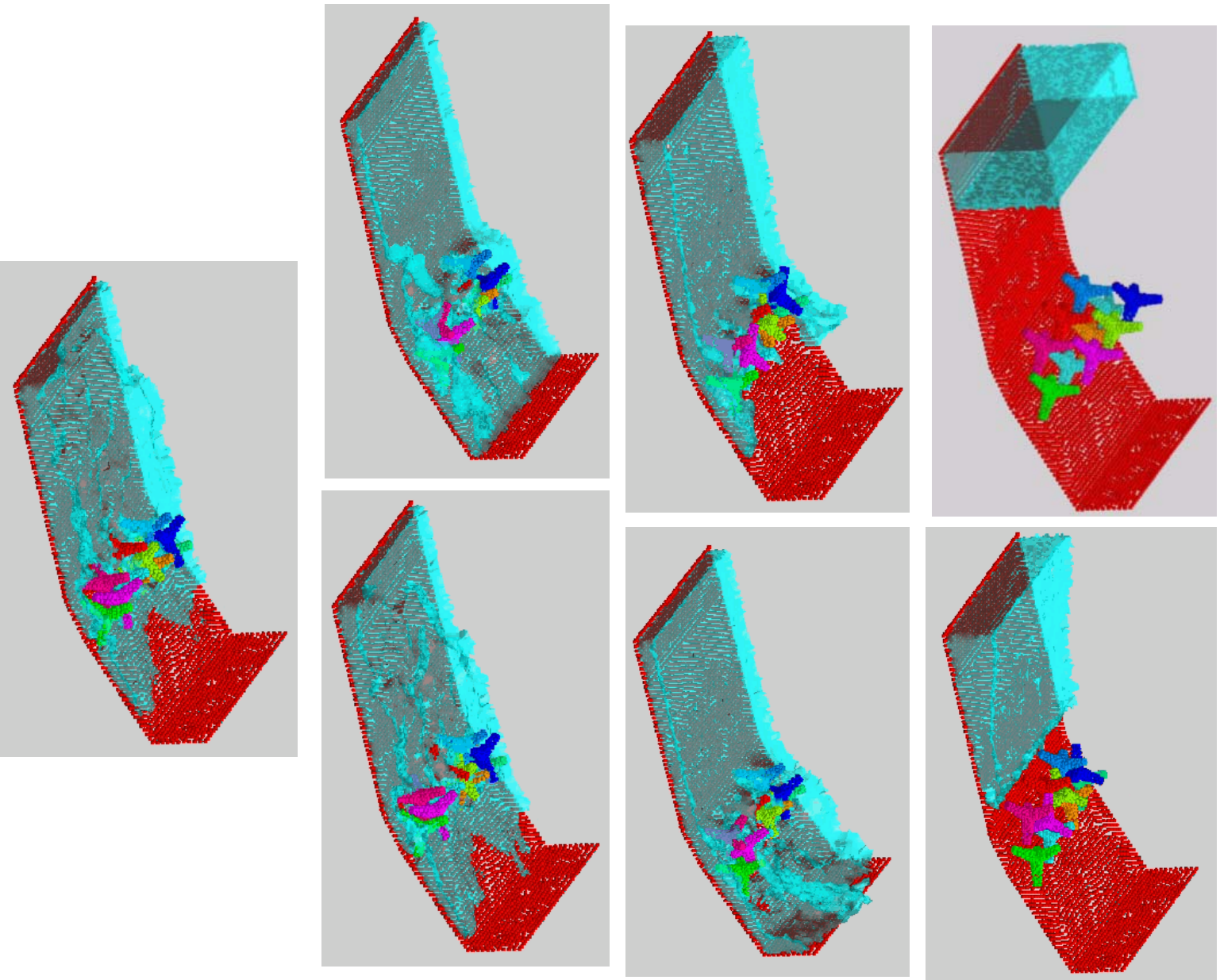


Figura 55. Caída de diez tetrapodos sobre un plano inclinado e interacción con una ola incidente.

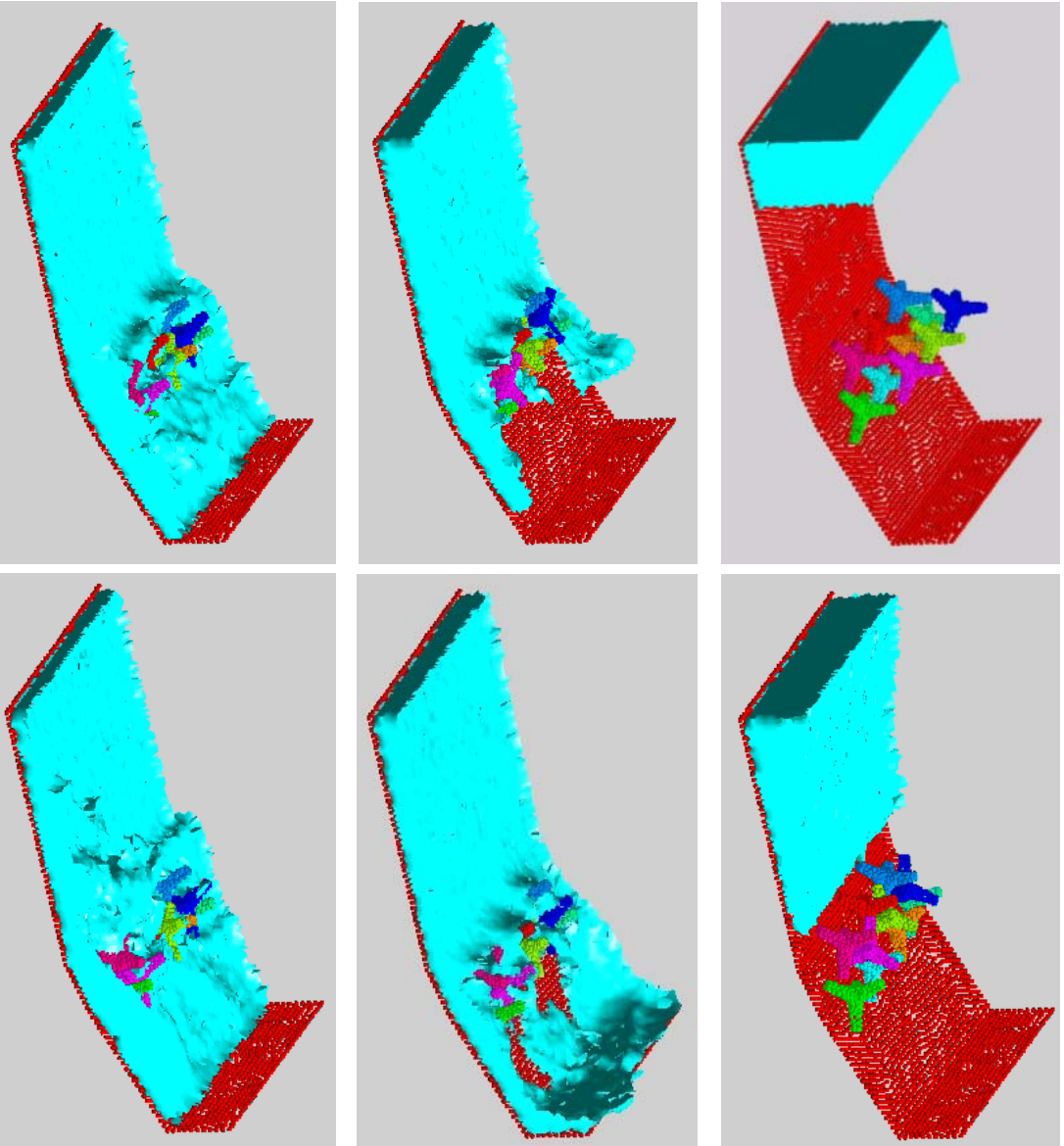


Figura 56. Caída de diez tetrápodos sobre un plano inclinado e interacción con una ola incidente.

11 CONCLUSIONES

El método de elementos finitos y partículas (PFEM) parece ideal para tratar problemas en los que se combinan fluidos con superficie libre con estructuras sumergidas o flotantes. La variedad de problemas que pueden analizarse con el PFEM es enorme e incluye problemas de interacción fluido-estructura incluyendo grandes movimientos de las partículas del fluido o de la estructura, olas, efectos salpicadura del agua y de separación de gotas, etc.

El éxito del PFEM se encuentra en la solución eficiente y precisa de las ecuaciones de un fluido incompresible y de la dinámica de sólidos utilizando una formulación lagrangiana para el sólido y el fluido y un método de elementos finitos estabilizado con elementos de orden bajo (triángulos y tetraedros) y la misma interpolación para todas las variables. Otros ingredientes esenciales de la solución son la regeneración eficiente de la malla utilizando una Tesselación de Dealauny estudiada, la utilización de funciones de forma de la interpolación MFEM y la

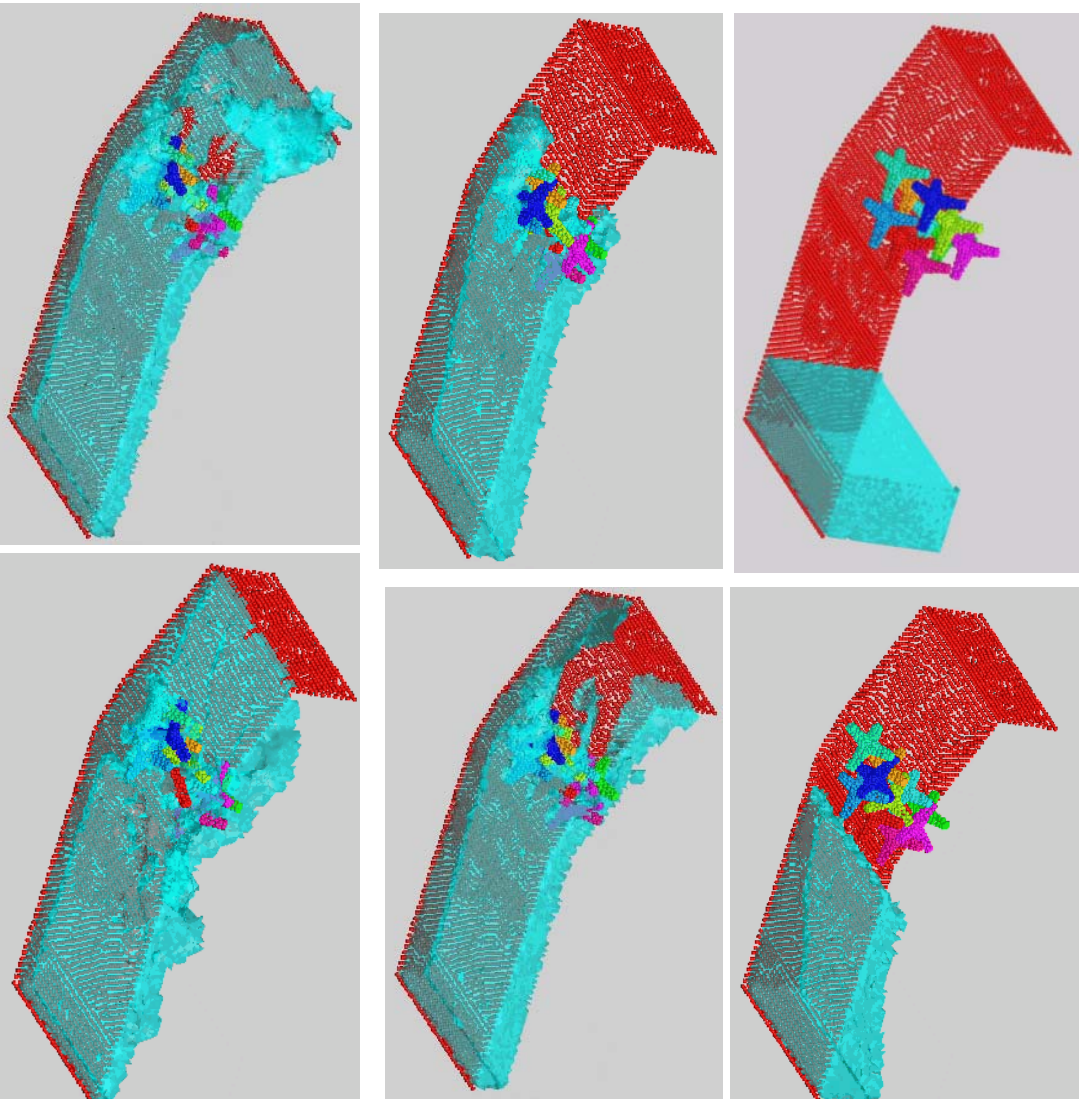


Figura 57. Caída de diez tetrapodos sobre un plano inclinado e interacción con una ola incidente.

identificación de los nodos del contorno con una técnica Alpha Shape.

Los ejemplos que se muestran en este informe son una evidencia de las posibilidades del PFEM para resolver problemas de interés práctico de la ingeniería de puertos y costas y, en particular, para el estudio del impacto de olas sobre diques de abrigo en puertos.

AGRADECIMIENTOS

Este informe es el resultado del trabajo de investigación realizado en el proyecto “Desarrollo de un sistema informático basado en métodos de partículas para el análisis del impacto de olas sobre diques de abrigo de puertos” desarrollado en el marco de las acciones estratégicas del área sectorial de Construcción Civil y Conservación del Patrimonio Histórico Cultural del Plan Nacional de Investigación Científica, Desarrollo e Innovación Tecnológica 2000-2003, Orden FOM/624/2003 de 25 de febrero (BOE no. 69 de 21 de Marzo de 2003).

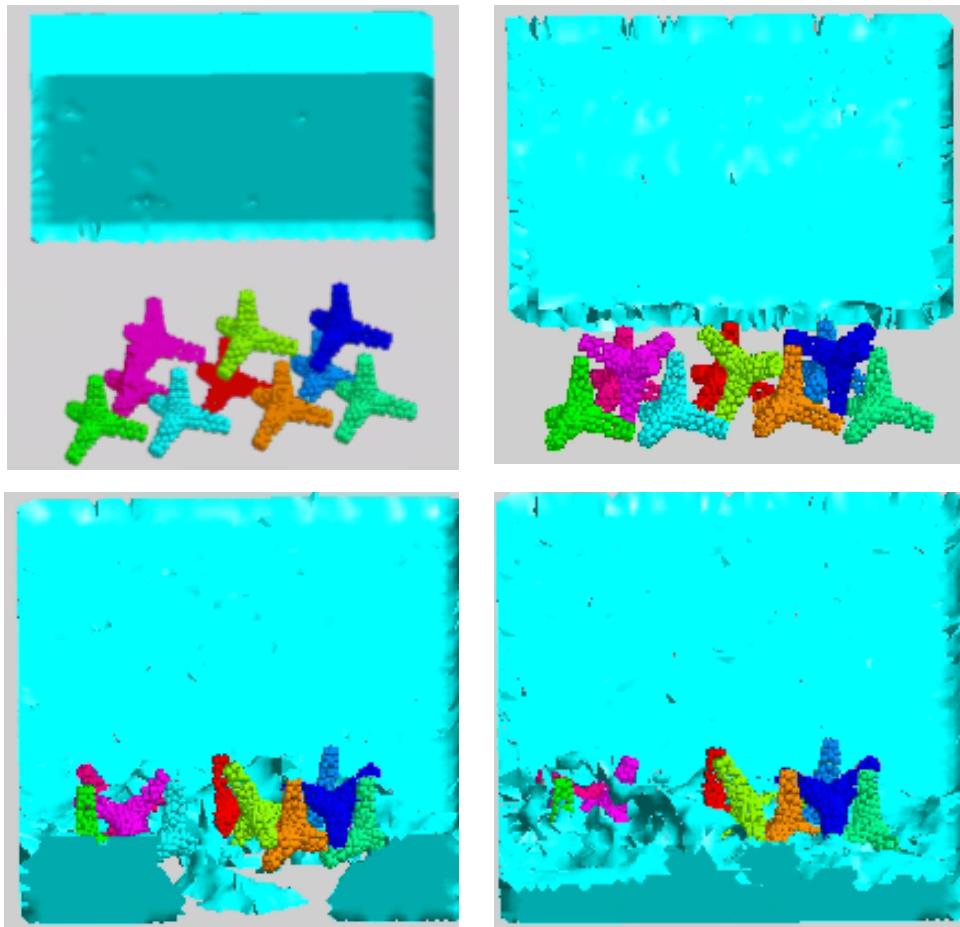


Figura 58. Vista vertical de la caída de diez tetrapodos sobre un plano inclinado e interacción con una ola incidente.

Los autores agradecen también a R. Aubry, N. Calvo, M. de Mier y R. Rossi sus muchas sugerencias durante el desarrollo del trabajo.

La geometría del dique de cilindros de hormigón que se muestra en la Figura 52 fue proporcionado por la empresa Dragados.

REFERENCIAS

- Aubry, R., Idelsohn, S.R. and Oñate, E. (2005). Particle finite element method in fluid mechanics including thermal convection-diffusion. *Computer & Structures*, **83**, 1459–75.
- Chorin, A.J. (1967). A numerical solution for solving incompressible viscous flow problems. *J. Comp. Phys.*, **2**: 12–26.
- Codina, R. (2002). Stabilized finite element approximation of transient incompressible flows using orthogonal subscales. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **191**: 4295–4321.
- Codina, R., Vazquez, M. and Zienkiewicz, O.C. (1998). A general algorithm for compressible and incompressible flow - Part III. The semi-implicit form. *Int. J. Num. Meth. in Fluids*, **27**: 13–32.

- Codina, R. and Blasco, J. (2000). Stabilized finite element method for the transient Navier-Stokes equations based on a pressure gradient operator. *Comput. Methods in Appl. Mech. Engrg.*, **182**: 277–301.
- Codina, R. and Zienkiewicz, O.C. (2002). CBS versus GLS stabilization of the incompressible Navier-Stokes equations and the role of the time step as stabilization parameter. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, **18 (2)**: 99–112.
- Cruchaga, M.A. and Oñate, E. (1997). A finite element formulation for incompressible flow problems using a generalized streamline operator. *Comput. Methods in Appl. Mech. Engrg.*, **143**: 49–67.
- Cruchaga, M.A. and Oñate, E. (1999). A generalized streamline finite element approach for the analysis of incompressible flow problems including moving surfaces. *Comput. Methods in Appl. Mech. Engrg.*, **173**: 241–255.
- Donea, J. and Huerta, A. (2003). *Finite element method for flow problems*. J. Wiley.
- Edelsbrunner, H. and Mücke, E.P. (1999). Three dimensional alpha shapes. *ACM Trans. Graphics*, **13**: 43–72.
- Franca, L.P. and Frey, S.L. (1992). Stabilized finite element methods: II. The incompressible Navier-Stokes equations. *Comput. Method Appl. Mech. Engrg.*, **99**: 209–233.
- García, J. and Oñate, E. (2003). An unstructured finite element solver for ship hydrodynamic problems. in *J. Appl. Mech.*, **70**: 18–26, January.
- George. (1991). *Automatic mesh generation. Application to the finite element method*, J. Wiley.
- GiD. (2004). The personal pre/postprocessor. CIMNE, Barcelona, www.gidhome.com.
- Hansbo, P. and Szepessy, A. (1990). A velocity-pressure streamline diffusion finite element method for the incompressible Navier-Stokes equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **84**: 175–192.
- Hughes, T.J.R., Franca, L.P. and Balestra, M. (1986). A new finite element formulation for computational fluid dynamics. V Circumventing the Babuska-Brezzi condition: A stable Petrov-Galerkin formulation of the Stokes problem accomodating equal order interpolations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **59**: 85–89.
- Hughes, T.J.R., Franca, L.P. and Hulbert, G.M. (1989). A new finite element formulation for computational fluid dynamics: VIII. The Galerkin/least-squares method for advective-diffusive equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **73**: 173–189.
- Hughes, T.J.R., Hauke, G. and Jansen, K. (1994). Stabilized finite element methods in fluids: Inspirations, origins, status and recent developments. in: *Recent Developments in Finite Element Analysis*. A Book Dedicated to Robert L. Taylor, T.J.R. Hughes, E. Oñate and O.C. Zienkiewicz (Eds.), CIMNE, Barcelona, Spain, pp. 272–292.
- Idelsohn, S.R., Oñate, E., Del Pin F. and Calvo, N. (2002). Lagrangian formulation: the only way to solve some free-surface fluid mechanics problems. *Fifth World Congress on Computational Mechanics*, Mang HA, Rammerstorfer FG and Eberhardsteiner J. (eds), July 7–12, Viena, Austria.

- Idelsohn, S.R., Oñate, E., Calvo, N. and del Pin, F. (2003a). The meshless finite element method. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **58**,6: 893–912.
- Idelsohn, S.R., Oñate, E. and Del Pin, F. (2003b). A lagrangian meshless finite element method applied to fluid-structure interaction problems. in *Computer and Structures*, **81**: 655–671.
- Idelsohn, S.R., Calvo, N. and Oñate, E. (2003c). Polyhedrization of an arbitrary point set. *Comput. Method Appl. Mech. Engng.*, **192** (22-24): 2649–2668.
- Idelsohn, S.R., Oñate, E. and Del Pin, F. (2004). The particle finite element method a powerful tool to solve incompressible flows with free-surfaces and breaking waves. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, submitted.
- Irons, B.M. (1970). A frontal solution program. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **2**: 5–32.
- Koshizuka, S. and Oka, Y. (1996). Moving particle semi-implicit method for fragmentation of incompressible fluid. *Nuclear Engng. Science*, **123**: 421–434.
- Laitone, E.V. (1960). The second approximation to cnoidal waves. *J. Fluids Mech.*, **9**: 430.
- Oñate, E. (1998). Derivation of stabilized equations for advective-diffusive transport and fluid flow problems. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, **151**: 233–267.
- Oñate, E. (2000). A stabilized finite element method for incompressible viscous flows using a finite increment calculus formulation. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, **182** (1–2): 355–370.
- Oñate, E. (2004). Possibilities of finite calculus in computational mechanics. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **60** (1): 255–281.
- Oñate, E. and Idelsohn, S.R. (1998). A mesh free finite point method for advective-diffusive transport and fluid flow problems. *Computational Mechanics*, **21**: 283–292.
- Oñate, E., Sacco, C. and Idelsohn, S.R. (2000). A finite point method for incompressible flow problems. *Comput. and Visual. in Science*, **2**: 67–75.
- Oñate, E. and García, J. (2001). A finite element method for fluid-structure interaction with surface waves using a finite calculus formulation. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, **191**: 635–660.
- Oñate, E., Idelsohn, S.R. and Del Pin, F. (2003). Lagrangian formulation for incompressible fluids using finite calculus and the finite element method. in *Numerical Methods for Scientific Computing Variational Problems and Applications*, Y. Kuznetsov, P. Neittanmaki and O. Pironneau (Eds.), CIMNE, Barcelona.
- Oñate, E., García, J. and Idelsohn, S.R. (2004). Ship hydrodynamics. In *Encyclopedia of Computational Mechanics*, E. Stein, R. de Borst and T.J.R. Hughes (Eds), J. Wiley.
- Radovitzki, R. and Ortiz, M. (1998). Lagrangian finite element analysis of a Newtonian flows. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **43**: 607–619.
- Sheng, C., Taylor, L.K. and Whitfield, D.L. (1996). Implicit lower-upper/approximate-factorization schemes for incompressible flows” *Journal of Computational Physics*, **128** (1), 32–42, 1996.

- Storti, M., Nigro, N. and Idelsohn, S.R. (1995). Steady state incompressible flows using explicit schemes with an optimal local preconditioning. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **124**: 231–252.
- Tezduyar, T.E., Mittal, S., Ray, S.E. and Shih, R. (1992). Incompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal order interpolation velocity–pressure elements. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **95**: 221–242.
- Tezduyar, T.E., Behr, M. and Liou, J. (1992a). A New Strategy for Finite Element Computations Involving Moving Boundaries and Interfaces - The Deforming-Spatial-Domain/Space-Time Procedure: I. The Concept and the Preliminary Numerical Tests. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **94**, 339–351.
- Tezduyar, T.E., Behr, M., Mittal, S. and J. Liou (1992b). A New Strategy for Finite Element Computations Involving Moving Boundaries and Interfaces - The Deforming-Spatial-Domain/Space-Time Procedure: II. Computation of Free-surface Flows, Two-liquid Flows, and Flows with Drifting Cylinders. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **94**, 353–371.
- Tezduyar, T. (2001). Finite Element Interface-Tracking and Interface-Capturing Techniques for Flows with Moving Boundaries and Interfaces ASME Paper IMECE2001/HTD-24206, Proceedings of the *ASME Symposium on Fluid-Physics and Heat Transfer for Macro- and Micro-Scale Gas-Liquid and Phase-Change Flows*, ASME, New York, New York, CD-ROM.
- Thompson, J.F., Soni, B.K. and Weatherill, N.P. (Eds.) (1999). *Handbook of Grid Generation*, CRC Press.
- Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L. (2000). *The finite element method*. 5th Edition, 3 Volumes, Butterworth–Heinemann.